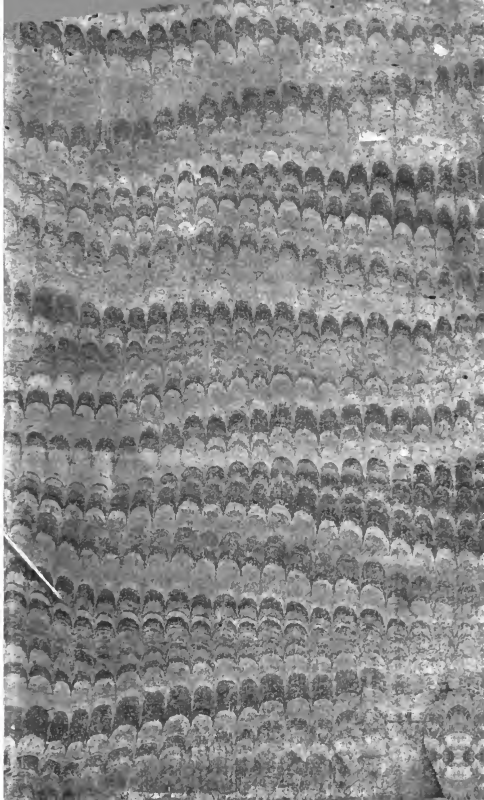




LES

PRINCIPES

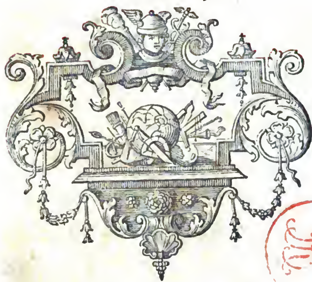
DE LA

SCIENCE

ET DES

MATHEMATIQUES.

par Coster, J.





A DRESDE, 1750.

Chez GEORGE CONRAD WALTHER,

Libraire du Roi.

16.



PREFACE.

Il y a des veritez que l'Experience fait connoitre & qui en prouvent d'autres, ſoit que celles ci ſe deduiſent d'une de celles là ou de pluſieurs conſiderées enſemble. Ces premieres veritez s'expriment, autant qu'il eſt poſſible, par des Definitions, que

l'on regarde par cette raison comme le fondement de la Science. Quel que soit le sujet d'une de ces propositions qu'on appelle des Axiomes parce que l'on se dispense de les prouver: si c'est un sujet que l'on puisse definir, cette definition prouvera cette proposition, qui d'un axiome deviendra un Theoreme. C'etoit pour etablir ainsi par des definitions les principes de la Science qu'on avoit entrepris l'Ouvrage que l'on presente ici au Public. On s'etoit proposé d'ecrire une Ontologie par où l'on

l'on entend cette partie de la Metaphysique qui traite des premieres Veritez, des veritez qui servent de principes à toutes les Sciences. Cela comprenoit les principes des Mathematiques. Il a fallu chercher la definition de la Grandeur & en deduire ce que les Geometres admettent sans le demontrer. Mais il est arrivé qu'en voulant deduire les premiers principes les uns des autres, l'on est entré bientôt dans les Mathematiques & que l'on n'en est pas sorti. C'est la suite des veritez plutôt que le des-

dessein de l' Auteur qui en est cause. Un petit nombre de veritez qu'on peut appeller de pure Metaphysique occupent le premier livre. La definition du Tout ouvre le second, où il falloit parler de la Grandeur même. Les grandeurs ne se comparent entre elles que par des Nombres. Comment donc comparer deux grandeurs incommensurables, c'est à dire qui n'ont point d'unité commune? Voilà l'Infini qui se presente. Car les Raisons numeriques ne sont applicables à certaines grandeurs que par le moyen

moyen d'une unité rationnelle ou infiniment petite. Après avoir veu en quoi consiste la Raison des grandeurs, on sait ce que c'est que la Puissance d'une grandeur & la Theorie des puissances ne suppose pas que les Grandeurs soient commensurables, mais elle indique celles qui le sont. La definition du Binome etant un principe sur lequel est fondée l'extraction des racines, on a crû devoir conduire le second livre jusques là. Mais il se trouve encore que la Grandeur s'est approprié le troisieme livre où l'on

parle

parle du Lieu, du Temps, des Changemens, de l'Action, de la Resistance. C'est ce qui a obligé de donner à cet ouvrage un autre titre que celui qu'on lui destinoit. On n'a pû l'appeller une Metaphysique parce que les proprietez de la Grandeur en faisoient une partie trop considerable. C'est pour cela qu'on l'a intitulé, les Principes de la Science & des Mathematiques.



LES

PRINCIPES DE LA SCIENCE ET DES MATHEMATIQUES.

LIVRE I.

DEFINITIONS.

I.

Le *Sujet* eſt une choſe dont on connoit ce qu'elle eſt, & l'affirmation de ce qu'elle eſt s'appelle l'*Attribut* du ſujet. Si l'on connoit que *A* eſt *B*, *A* eſt un Sujet & Etre *B* eſt un Attribut de *A*. L'affirmation d'un ſujet s'appelle l'*Eſſence* de ce ſujet. Si *A* eſt un ſujet, Etre *A* eſt l'Eſſence de *A*.

II.

Un attribut eſt *Raiſon ſuffiſante* d'un autre, s'il ſuffit qu'un ſujet renferme le premier attribut

A pour

pour que ce ſujet renferme le ſecond. Soit *A* un ſujet qui renferme l'attribut *B*. S'il ſuffit que *A* renferme *B* pour que *C* ſoit un attribut de *A*, *B* eſt Raiſon ſuffiſante de *C*.

III.

L'*Attribut eſſentiel* d'un ſujet en eſt un attribut qui a pour raiſon ſuffiſante l'eſſence de ce ſujet. La *Proprieté* d'un ſujet en eſt un attribut eſſentiel qui eſt raiſon ſuffiſante de l'eſſence de ce ſujet. L'*Accident* d'un ſujet en eſt un attribut qui ne lui eſt pas eſſentiel. Soit *B* un attribut d'un ſujet *A*. Si Etre *A* eſt raiſon ſuffiſante de *B*, *B* eſt un attribut eſſentiel de *A*. Si *B* attribut eſſentiel de *A*, eſt auſſi raiſon ſuffiſante d'Etre *A*, *B* eſt une Proprieté de *A*. Et ſi *B* attribut de *A*, n'en eſt pas un attribut eſſentiel, *B* eſt un Accident de *A*.

IV.

Deux ſujets dont l'un eſt reciproquement l'autre ſont le *même* ſujet. Soit *A* un ſujet, & *B* un ſujet. Si *A* eſt *B*, & que *B* ſoit *A*, *A* & *B* ſont le même ſujet.

V.

L'*Eſpece* eſt un ſujet dont un attribut, qui eſt raiſon ſuffiſante de tous les attributs de ce ſujet, convient à des ſujets qui ne ſont pas le même entre eux. On appelle cet attribut l'*Attribut commun* de l'eſpece, & ces ſujets les ſujets qui *comprennent* l'eſpece. Soient *A* & *B* des ſujets qui ne ſoient pas le même & qui renferment l'attribut *O*. Soit *E* un ſujet qui renferme *O*, & qui

qui ſoit tel que *O* ſoit raiſon ſuffiſante de tous les attributs de *E*. *E* eſt une Eſpece dont *O* eſt l'attribut commun. *A* & *B* ſont les ſujets qui comprennent *E*. Le ***Genre*** eſt une eſpece compriſe par d'autres eſpeces. Soit *E* une Eſpece que comprennent les ſujets *A* & *B*. Si *A* & *B* ſont des eſpeces, *E* eſt un Genre.

VI.

L'***Individu*** eſt un ſujet dont un attribut ne convient qu'à des ſujets qui ſont le même. On appelle cet attribut un *Attribut individuel*. Si *B* attribut du ſujet *A*, eſt tel que tout ſujet qui renferme *B* ſoit le même que *A*, *A* eſt un Individu dont *B* eſt un Attribut individuel.

VII.

Un ſujet ***exiſte***, s'il a un attribut ſans lui en ſuppoſer aucun qui ſoit raiſon ſuffiſante de celui-là. Si *B* eſt un attribut du ſujet *A* ſans que *B* ait pour raiſon ſuffiſante un attribut que l'on ſuppoſe que *A* renferme, *A* exiſte.

THEOREME I.

Tout attribut qui en exprime un autre en eſt raiſon ſuffiſante. Soit *B* un attribut d'un ſujet *A*. Soit *C* un attribut. Si en exprimant que *A* renferme *B*, on exprime que *A* renferme *C*, *B* eſt raiſon ſuffiſante de *C*.

Puiſque *B* eſt un attribut du ſujet *A*, & qu'en exprimant que *A* renferme *B*, on exprime que *A* renferme *C*, *A* renferme *C*. Il ſuffit donc que *A*

renferme *B* pour que *A* renferme *C*, & ainſi *par Defin.* 2. *B* eſt raiſon ſuffiſante de *C*.

EXEMPLE. Si l'on entend par la Sageſſe la connoiſſance de ſes devoirs, une perſonne qui eſt ſage connoit ſes devoirs, elle a des devoirs & des connoiſſances. Le premier de ces attributs eſt raiſon ſuffiſante des trois autres.

COROLLAIRE.

Il n'eſt pas moins vrai qu'un attribut en exprime un autre, s'il en eſt raiſon ſuffiſante. Car l'expreſſion de l'un fait connoitre l'autre.

THEOREME II.

Si tout ſujet qui renferme un attribut en renferme un autre, le ſujet qui ne renferme pas celui-ci ne renferme pas celui-là. Soit *A* un ſujet. Soient *B C* des attributs tels que *A* ne renferme pas *C*. Si tout ſujet qui renferme *B* renferme *C*, *A* ne renferme pas *B*.

Si le ſujet *A* renfermoit l'attribut *C*, ce ſeroit dire que *A* eſt un des ſujets qui renferment *C*, & puiſque *A* ne renferme pas *C*, *A* n'eſt aucun des ſujets qui renferment *C*. Or tout ſujet qui renferme *C*, etant tel que *A* n'eſt point ce ſujet là & par la ſuppoſition tout ſujet qui renferme l'attribut *B* renfermant *C*, il s'enſuit que tout ſujet qui renferme *B*, eſt auſſi tel que *A* n'eſt point ce ſujet. Et par conſequent *A* n'eſt aucun des ſujets qui renferment *B*, *A* ne renferme point *B*.

CORO-

COROLLAIRE.

On prouvera de même que ſi tout ſujet qui renferme un certain attribut n'en renferme pas un autre, le ſujet qui renferme celui-ci ne renferme pas celui-là : & que ſi tout ſujet qui ne renferme pas un certain attribut en renferme (ou n'en renferme pas) un autre, le ſujet qui ne renferme pas (& dans le ſecond cas le ſujet qui renferme) le ſecond renferme le premier.

THEOREME III.

Si un attribut eſt raiſon ſuffiſante d'un autre attribut & celui-ci d'un troiſiéme, le premier eſt raiſon ſuffiſante du dernier. Soient *B C D* des attributs tels que *B* ſoit raiſon ſuffiſante de *C*. Si *C* eſt raiſon ſuffiſante de *D*, *B* eſt raiſon ſuffiſante de *D*.

B C D etant des attributs tels que *B* eſt raiſon ſuffiſante de *C*, il ſuffit *par Defin.* 2. qu'un ſujet renferme *B*, pour que ce ſujet renferme *C*. Et *C* etant raiſon ſuffiſante de *D*, il ſuffit qu'un ſujet renferme *C*, pour que ce ſujet renferme *D*. Il ſuffit donc qu'un ſujet renferme *B*, pour que ce ſujet renferme *D*, & ainſi *B* eſt raiſon ſuffiſante de *D*.

THEOREME IV.

L'eſſence d'un ſujet en eſt une proprieté. Soit *A* un ſujet. L'eſſence de *A* eſt une proprieté de *A*.

A etant un certain ſujet, *A* renferme un attribut *B*, qui eſt tel que l'on entend par *A* un ſujet

qui renferme *B*. Ainſi en diſant qu'un ſujet renferme *B*, on dit que ce ſujet eſt *A*, & puiſque *A* renferme *B*, *A* eſt *A*. Etre *A*, ou l'eſſence de *A* eſt donc *par Defin.1.* un attribut de *A*, & Etre *A* *par Theor.1.* eſt raiſon ſuffiſante d'Etre *A*. Donc *par Defin.3.* l'eſſence de *A* eſt non ſeulement un attribut eſſentiel, mais encore une proprieté de *A*.

EXEMPLE. La Figure terminée par une ligne dont tous les points ſont egalement eloignés d'un même point, c'eſt ce qu'on appelle le Cercle, & comme le Cercle eſt cette figure, il eſt vrai auſſi que le Cercle eſt le Cercle, d'où il ſuit qu'Etre le Cercle eſt une proprieté du Cercle.

THEOREME V.

Tout attribut qui a pour raiſon ſuffiſante l'attribut eſſentiel d'un ſujet, eſt un attribut eſſentiel de ce ſujet là. Soit *A* un ſujet, *B* un attribut eſſentiel de *A*, *C* un attribut. Si *B* eſt raiſon ſuffiſante de *C*, *C* eſt un attribut eſſentiel de *A*.

B etant un attribut eſſentiel du ſujet *A*, l'eſſence de *A* eſt raiſon ſuffiſante de *B*, & *B* etant raiſon ſuffiſante de l'attribut *C*, l'eſſence de *A* eſt *par Theor. 3.* raiſon ſuffiſante de *C*. Or *par Theor. 4.* l'eſſence de *A* eſt un attribut de *A*. Donc *C* eſt un attribut eſſentiel de *A*.

THEOREME VI.

Chaque proprieté eſt raiſon ſuffiſante de tous les attributs eſſentiels du ſujet. Soit *B* une proprieté du ſujet *A*, *C* un attribut eſſentiel de *A*. *B* eſt raiſon ſuffiſante de *C*.

B etant

B etant une proprieté du ſujet *A*, *B* eſt raiſon ſuffiſante de l'eſſence de *A*. Or *C* etant un attribut eſſentiel de *A*, l'eſſence de *A* eſt raiſon ſuffiſante de *C*. Donc *par Theor. 3.* *B* eſt raiſon ſuffiſante de *C*.

COROLLAIRE.

On voit auſſi que tout attribut eſſentiel, qui eſt raiſon ſuffiſante d'une proprieté eſt une proprieté.

THEOREME VII.

Deux ſujets dont l'un eſt l'autre ſont le même ſujet. Soient *AB* deux ſujets. Si *A* eſt *B*, *A* & *B* ſont le même ſujet.

Le ſujet *A* eſt *A par Theor. 4.* & dire que *A* eſt *A*, c'eſt dire que *A* n'eſt aucun des ſujets qui ne ſont pas *A*. Or par la ſuppoſition *A* eſt le ſujet *B*. Donc *par Theor. 2. Cor.* *B* eſt *A*. Ainſi *par Defin. 4.* *A* & *B* ſont le même ſujet.

EXEMPLE. Si l'Aſtre qui éclaire le plus la Terre, eſt l'Aſtre autour duquel Mercure, Venus & les autres Planétes qui nous ſont connues, ſont leurs revolutions, ces deux Aſtres ſont le même.

THEOREME VIII.

Si l'attribut d'un ſujet eſt la proprieté d'un autre ſujet, ces deux ſujets ſont le même. Soient *A B* deux ſujets. Soit *H* un attribut de *A*. Si *H* eſt une proprieté de *B*, *A* & *B* ſont le même ſujet.

H etant une proprieté du ſujet *B*, *H* eſt raiſon ſuffiſante de l'eſſence de *B*. Et *H* etant un attribut du ſujet *A*, il s'enſuit que l'eſſence de *B* eſt un attribut de *A*. Or puiſque *A* eſt *B*, *A* & *B* ſont le même ſujet *par Theor. 7.*

THEOREME IX.

Si deux ſujets ſont le même, chacun renferme tous les attributs de l'autre. Soient *A B* deux ſujets. Soit *H* un attribut de *A*. Si *A* & *B* ſont le même ſujet, *H* eſt un attribut de *B*.

A & *B* étant le même ſujet, *B* eſt *A* & puisque. *H* eſt un attribut de *A*, *B* eſt un ſujet qui renferme *H*. Or dire que *B* eſt un ſujet qui renferme *H*, c'eſt dire que *B* renferme *H*. *B* renferme donc *H*.

THEOREME X.

Les ſujets qui ſont le même qu'un troiſieme ſont le même entre eux. Soient *A B C* des ſujets tels que *A B* ſoient le même ſujet. Si *B C* ſont le même ſujet, *A C* ſont le même ſujet.

Les ſujets *A B C* etant tels que *A B* ſont le même ſujet, *A* eſt *B*. Et *B C* etant le même ſujet, *B* eſt *C*. D'où il ſuit *par Theor. 9.* que *A* eſt *C*. Par la même raiſon, puiſque *C* eſt *B* & que *B* eſt *A*, *C* eſt *A*. Donc *A C* ſont le même ſujet.

THEOREME XI.

Si un attribut eſt renfermé par deux ou pluſieurs ſujets qui ne ſoient pas le même, ces ſujets com-

comprennent une espece de laquelle cet attribut est l'attribut commun. Soient *A B* des sujets qui ne soient pas le même & qui renferment l' attribut *O*. *A B* comprennent une espece dont *O* est l' attribut commun.

Puisque *O* est un attribut, si je ne considere dans un sujet qui renferme *O* que *O*, & les attributs dont *O* est raison suffisante, tout attribut que je reconnoitrai dans ce sujet conviendra à tous les sujets qui renferment *O*. Je considere donc un sujet que j' appelle *E* comme n' ayant aucun autre attribut que *O*, & les attributs dont *O* est raison suffisante. Et puisque *O* est un attribut des sujets *A B* qui ne sont pas le même, *E* est une espece, *O* est l'attribut commun de *E*, & *A B* comprennent *E* *par Defin. 5.*

EXEMPLE. Je voi differens hommes, des sujets qui ne sont pas le même & dont chacun renferme l'attribut d' être soldat. Si je ne considere dans un de ces sujets, que cet attribut & ceux qui resultent de celui-là, je considere un sujet, que j'appelle le soldat, comme ne renfermant point d'autre attribut que celui d' être soldat & les attributs dont celui-là est raison suffisante. Le soldat est une espece, être soldat l' attribut commun de l'espece, & chacun de ces differens sujets, que j'appelle un soldat, renferme cet attribut commun & comprend l'espece. Le Triangle est un genre, parceque le triangle rectangle, le triangle dont un angle est obtus, & le triangle qui n'a que des angles aigus sont des especes qui comprennent le triangle.

THEO-

THEOREME XII.

Tout ſujet qui comprend l'eſpece a quelque attribut, dont l'attribut commun de l'eſpece n'eſt pas raiſon ſuffiſante. Soit *E* une eſpece, dont *O* ſoit l'attribut commun. Soit *A* un ſujet qui comprenne *E.* *A* renferme quelque attribut, dont *O* n'eſt pas raiſon ſuffiſante.

Puiſque le ſujet *A* comprend l'eſpece *E*, quelque autre ſujet *B* qui n'eſt pas le même que *A* comprend *E*, & renferme par conſequent *O* attribut commun de *E.* *B* n'eſt pas *A par Theor.* 7. & l'eſſence de *A* n'etant pas un attribut de *B*, il s'enſuit *par Theor.* 4. que *B* ne renferme pas tous les attributs de *A.* *A* renferme donc un attribut *M*, qui n'eſt pas un attribut de *B.* Mais *B* renfermant *O* renferme tout attribut dont *O* eſt raiſon ſuffiſante. *O* n'eſt donc pas raiſon ſuffiſante de *M* attribut de *A.*

THEOREME XIII.

Tout ſujet qui n'eſt pas le même que l'eſpece & qui en renferme l'attribut commun comprend l'eſpece. Soit *E* une eſpece dont *O* ſoit l'attribut commun. Soit *A* un ſujet qui ne ſoit pas le même que *E.* Si *A* renferme *O*, *A* comprend *E.*

Puiſque *E* eſt une eſpece dont *O* eſt l'attribut commun, & que le ſujet *A* n'eſt pas le même que *E*, *A* n'eſt pas *E par Theor.* 7. *O* convient à des ſujets qui ne ſont pas le même entre eux. Quelqu'un de ces ſujets n'eſt donc pas le même que *A.* Car tous les ſujets qui ſont le même

que

que *A* ſont le même entre eux, *par Theor. 10.* Or par la ſuppoſition *A* renferme *O*. *A* eſt donc un de ces ſujets, qui ne ſont pas le même entre eux & qui comprennent *E*.

THEOREME XIV.

Deux eſpeces dont chacune renferme l'attribut commun de l'autre ſont la même. Soit *E* une eſpece dont *O* ſoit l'attribut commun, *F* une eſpece dont *P* ſoit l'attribut commun. Si *E* renferme *P* & que *F* renferme *O*, *E* eſt la même que *F*.

L'Eſpece *E* dont *O* eſt l'attribut commun renfermant *P* attribut commun de l'eſpece *F*, *O* eſt raiſon ſuffiſante de *P*. Tout ſujet qui comprend *E* renferme quelque attribut, dont *O* n'eſt pas raiſon ſuffiſante *par Theor.12.* Mais *F* ne renfermant aucun attribut dont *P* ne ſoit raiſon ſuffiſante, & *O* etant raiſon ſuffiſante de *P*, il s'enſuit *par Theor.3.* que *F* ne renferme aucun attribut dont *O* ne ſoit raiſon ſuffiſante. *F* ne comprend donc pas *E*, & puiſque *F* renferme *O*, *F* eſt la même que *E* *par Theor. 13.*

THEOREME XV.

Si deux eſpeces ſont la même, chacune eſt compriſe par le ſujet qui comprend l'autre. Soient *EF* deux eſpeces qui ſoient la même. Si le ſujet *A* comprend *E*, *A* comprend *F*.

E etant la même eſpece que *F*, tous les attributs de *F* ſont des attributs de *E*, *par Theor.9.* L'attri-

L' attribut commun de *E* eſt donc raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *F*. Et par conſequent le ſujet *A* qui comprend *E* renferme l'attribut commun de *F*. Or *A* n' eſt pas le même que *E*, *par Theor. 12.* *A* n'eſt donc pas le même que *F*, *par Theor. 10.* Donc *A* comprend *F*, *par Theor. 13.*

THEOREME XVI.

Si deux ſujets ſont le même, chacun comprend l'eſpece qui eſt compriſe par l'autre. Soient *A B* deux ſujets qui ſoient le même. Si *A* comprend l' eſpece *E*, *B* comprend *E*.

A etant le même ſujet que *B*, tous les attributs de *A* ſont des attributs de *B*, *par Theor. 9.* *A* comprenant l'eſpece *E* renferme l' attribut commun de *E*. Et par conſequent *B* renferme l'attribut commun de *E*. Or *A* n'eſt pas le même que *E*, *par Theor 12.* *B* n'eſt donc pas le même que *E*, *par Theor. 10.* Donc *B* comprend *E*, *par Theor. 13.*

THEOREME XVII.

Le ſujet qui comprend l'eſpece comprend le genre. Soit *E* une eſpece dont *O* ſoit l'attribut commun, *F* une eſpece dont *P* ſoit l'attribut commun. Soit *A* un ſujet qui comprenne *E*. Si *E* comprend *F*, *A* comprend *F*.

L'eſpece *E* dont *O* eſt l'attribut commun comprenant l'eſpece *F* dont *P* eſt l'attribut commun, *O* eſt raiſon ſuffiſante de *P*. Et le ſujet *A* qui comprend *E* renferme *O*, & par conſequent *A* renfer-

renferme *P*. Or *A* renferme quelque attribut dont *O* n'eſt pas raiſon ſuffiſante, *par Theor. 12.* D'où il ſuit *par Theor. 3.* que *A* renferme auſſi quelque attribut dont *P* n'eſt pas raiſon ſuffiſante. Et comme *F* n'a point d'attribut dont *P* ne ſoit raiſon ſuffiſante, *A* n'eſt pas le même que *F*, *par Theor. 9.* *A* comprend donc *F*, *par Theor. 13.*

THEOREME XVIII.

L'attribut d'une eſpece eſt raiſon ſuffiſante d'un autre attribut ſi tout ſujet qui renferme le premier renferme le ſecond. Soit *E* une eſpece dont *O* ſoit l'attribut commun. Soit *P* un attribut de *E*. Si tout ſujet qui renferme *P* renferme l'attribut *Q*, *P* eſt raiſon ſuffiſante de *Q*.

E etant une eſpece dont *O* eſt l'attribut commun & *P* etant un attribut de *E*, *O* eſt raiſon ſuffiſante de *P* & *O* etant renfermé par des ſujets qui ne ſont pas le même, *P* eſt auſſi renfermé par des ſujets, qui ne ſont pas le même. Or puiſque tout ſujet qui renferme *P* renferme l'attribut *Q*, on connoit que tout ſujet qui renferme *P* renferme *Q*, *par Defin. 1.* Par conſequent, ou il ſuffit de connoitre qu'un ſujet renferme *P* pour connoitre que ce ſujet renferme *Q*, ou *P* exprime l'eſſence d'un ſujet, qui etant conſideré fait connoitre qu'il renferme *Q*. Mais *P* n'exprime l'eſſence d'aucun ſujet parceque l'eſſence d'un ſujet n'eſt renfermée que par des ſujets qui ſont le même, *par Theor. 7.* Il ſuffit donc de connoitre qu'un ſujet renferme *P* pour connoitre que ce ſujet renferme *Q*. Ainſi *P* eſt raiſon ſuffiſante de *Q*.

THEO-

THEOREME XIX.

Tous les attributs de l'espece lui sont essentiels. Soit *E* une espece. Soit *T* un attribut de *E.* *T* est un attribut essentiel de *E.*

E etant une espece, tout sujet qui renferme l'essence de *E*, est le même que *E*, *par Theor.7.* *T* etant un attribut de *E*, tout sujet qui renferme l'essence de *E*, renferme donc *T*, *par Theor.9.* Or *par Theor. 4.* l'essence de *E* est un attribut de *E.* Donc *par Theor.18.* l'essence de *E* est raison suffisante de *T.* Ainsi *T* est un attribut essentiel de *E.*

THEOREME XX.

Tout sujet qui n'est pas une espece est un individu. Soit *A* un sujet. Si *A* n'est pas une espece, *A* est un individu.

Supposé qu'un attribut *O* convienne à des sujets qui ne soient pas le même. *O* est l'attribut commun d'une espece *E*, *par Theor.11.* Tout sujet qui ne renferme que *O*, & des attributs dont *O* est raison suffisante est le même que *E*, *par Theor.14.* Mais le sujet *A* n'étant pas une espece, *A* n'est pas *E.* *A* renferme donc quelque attribut, qui n'a pas pour raison suffisante *O* un attribut renfermé par des sujets qui ne sont pas le même. Or puisque *A* renferme quelque attribut, qui ne convient qu'à des sujets qui sont le même, *A* est un individu, *par Defin. 6.*

EXEMPLE. Si l'attribut d'être l'etoile que je regarde convenoit à des sujets qui ne fussent pas

pas le même entre eux, cette etoile ſeroit une eſpece, & ne l'etant pas, cet attribut n'appartient qu'à des ſujets qui ſont le même, d'où il ſuit que cette etoile eſt un individu.

THEOREME XXI.

L'individu qui renferme l'attribut commun de l'eſpece comprend l'eſpece. Soit *A* un individu. Soit *E* une eſpece dont *O* ſoit l'attribut commun. Si *A* renferme *O*, *A* comprend *E*.

E etant une eſpece dont *O* eſt l'attribut commun, tout attribut de *E* convient à des ſujets qui ne ſont pas le même. Mais *A* etant un individu renferme quelque attribut, qui ne convient qu'à des ſujets qui ſont le même. Donc *par Theor. 9.* *A* & *E* ne ſont pas le même ſujet. D'où il ſuit *par Theor. 13.* que *A*, qui renferme *O*, comprend *E*.

THEOREME XXII.

Si un attribut individuel n'eſt pas raiſon ſuffiſante de quelque attribut de l'individu, ce dernier attribut eſt un accident. Soit *A* un individu, *H* un attribut individuel de *A*, *T* un attribut de *A*. Si *H* n'eſt pas raiſon ſuffiſante de *T*, *T* eſt un accident.

Car ſi l'on entend par *B* un ſujet qui renferme *H*, cet attribut *H* eſt l'eſſence de *B*. Or *A* etant un individu & *H* etant un attribut individuel de *A*, il s'enſuit que *A* & *B* ſont le même ſujet. *T* attribut de *A* eſt donc un attribut de *B*, *par Theor. 9.* & *H* n'etant pas raiſon ſuffiſante de *T*, il s'enſuit *par Defin. 3.* que *T* eſt un accident de *B*.

CORO-

COROLLAIRE.

Si un individu a deux attributs individuels dont l'un ne ſoit pas raiſon ſuffiſante de l'autre, le même attribut eſt un attribut eſſentiel & un accident.

SCHOLIE.

On a ſuppoſé dans ce Theoreme & dans ce Corollaire ce que l'experience nous apprend. Il n'y a point d'individu dont nous connoiſſions un attribut, qui ſoit raiſon ſuffiſante de tous les attributs que ce ſujet renferme, & entre les individus que nous connoiſſons il n'en eſt point qui n'ait pluſieurs attributs individuels dont aucun n'eſt raiſon ſuffiſante des autres. C'eſt donc l'expreſſion qui decide ſi l'attribut d'un individu lui eſt eſſentiel ou non. Suppoſé que je voie un individu qui s'approche de moi, & que je le deſigne ainſi: la Perſonne que je voi, il ſera eſſentiel à cet individu d'être doüé d'intelligence; mais il ne lui ſera pas eſſentiel de marcher. Que ſi je le deſigne ainſi: l'Objet qui s'approche de moi, il ne lui ſera pas eſſentiel d'être une perſonne; mais il lui ſera eſſentiel de changer de place.

THEOREME XXIII.

Tout individu exiſte. Soit *A* un individu. *A* exiſte.

A etant un individu renferme un attribut *H* qui ne convient qu'à des ſujets qui ſont le même. Or *H* etant un attribut, quelque ſujet *B* renferme *H*, *par Defin. 1.* *B* renferme donc *H* ſans lui ſuppoſer

poſer aucun attribut qui ſoit raiſon ſuffiſante de *H*. Donc *A*, qui eſt le même ſujet que *B*, exiſte *par Defin. 7.*

EXEMPLE. On connoit dans une perſonne un attribut qui ne convient qu' a elle, & parce que ce ne ſeroit pas un attribut, ſi on ne le remarquoit dans quelque ſujet ſans lui rien ſuppoſer, cette perſonne, qui eſt ce ſujet, exiſte.

THEOREME XXIV.

Les eſpeces n' exiſtent point. Soit *E* une ſpece. *E* n' exiſte point.

E etant une eſpece renferme un attribut *O* qui eſt raiſon ſuffiſante de tous les attributs de *E* & qui convient à des ſujets qui ne ſont pas le même. Mais tout attribut qui eſt raiſon ſuffiſante de tous les attributs d'un ſujet ne convient qu' à des ſujets qui ſont le même, *par Theor. 4 & 8.* *E* ne renferme donc *O* que parceque on ſuppoſe que *E* renferme *O* ou quelque autre attribut qui eſt raiſon ſuffiſante de *O*. Et comme *E* ne renferme aucun attribut dont *O* ne ſoit raiſon ſuffiſante, il s'enſuit que *E* ne renferme aucun attribut ſans lui en ſuppoſer quelqu'un qui ſoit raiſon ſuffiſante de celui là. Donc *E* n'exiſte point.

COROLLAIRE.

Tout ce qui exiſte eſt donc un individu, parceque tout ſujet eſt un individu ou une eſpece, *par Theor. 20.*

THEOREME XXV.

Toute espece est comprise par differens individus. Soit *G* une espece. Quelques individus qui ne sont pas le même sujet comprennent *G.*

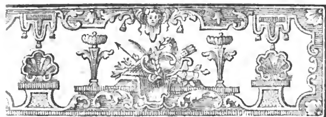
G etant une espece n'existe pas *par Theor. 24.* On connoit donc des sujets *EF* qui ne sont pas le même & qui renferment l'attribut *Q* que l'on suppose être renfermé par *G.* Si *E* n'est pas un individu, *E* est une espece, *par Theor. 20.* On connoit donc des sujets *CD* qui ne sont pas le même & qui renferment *O* attribut commun de *E* & raison suffisante de *Q.* Et comme toute espece demande la connoissance de quelques sujets qui la comprennent & qui ne soient pas le même, il s'ensuit que *Q* est l'attribut de quelques sujets qui ne sont pas le même & qui ne sont pas des especes mais des individus. Donc *par Theor. 21.* des individus qui ne sont pas le même comprennent *G.*

COROLLAIRE.

Tout attribut est donc l'attribut d'un individu, parceque tout attribut d'une espece est l'attribut des sujets qui la comprennent.



LES



LES

PRINCIPES
E LA SCIENCE

ET DES

MATHEMATIQUES.

LIVRE II.

DEFINITION I.

Le *Tout* ou l'*Eſpece compoſée* eſt une eſpece qui en comprend pluſieurs autres dont aucune n'eſt ni ne comprend l'autre & qui ſont telles que tout ſujet qui les comprend tes eſt ou comprend cette eſpece. Chacune ces eſpeces *compoſe* le Tout & toutes enſemble *uiſent*. Soient *B C D* des eſpeces dont aucune ſoit la même que l'autre ni ne comprenne itre. Soit *A* une eſpece qui comprenne ; *D*. Si tout ſujet qui comprend *B C D* le même que *A* ou comprend *A*, *A* eſt un ut, *B* compoſe *A* & *B C D* epuiſent *A*.

THEOREME I.

Si une espece en comprend deux autres qui ne soient pas la même & dont aucune ne comprenne l'autre, ces deux especes epuisent la premiere ou un Tout qu'elle comprend. Soit *A* une espece. Soient *C D* deux especes telles que *C* ne soit pas *D*, que *C* ne comprenne pas *D* & ne soit pas comprise par *D*. Si *A* comprend *CD*, *CD* epuisent *A* ou un Tout que *A* comprend.

A C D etant des especes telles que *A* comprend *C D*, *O* attribut commun de *A* est raison suffisante de *Q* attribut commun de *C* & de *R* attribut commun de *D*. Puisque *C* n'est pas *D* & que *C* ne comprend pas *D* & n'est pas comprise par *D*, il s'ensuit par le 13[e] Theoreme du premier livre que *C* ne renferme pas *R* & que *D* ne renferme pas *Q*. *Q* n'est donc pas raison suffisante de *R* & *R* n'est pas raison suffisante de *Q*. Supposé que l'on entende par *P* ces deux attributs *Q R*. *O* est raison suffisante de *P*. *P* est donc renfermé par des sujets qui ne sont pas le même, d'où il suit par le 11[e] Theoreme du premier livre que *P* est l'attribut commun d'une espece *B*. Or comme tout sujet qui renferme *Q R* renferme *P*, il s'ensuit que tout sujet qui comprend *C D* est ou comprend *B*, & par consequent *B* est un Tout epuisé par *C D*. Si *A* comprend *B*, *A* comprend donc un Tout epuisé par *C D*. Et si *A* qui comprend *C D* ne comprend pas *B*, *A* est le même sujet que *B*, d'où il suit par le 9[e] Theoreme du premier livre que *O*

est

ın attribut de *B*. *P* eſt donc raiſon ſuffiſante *O*, & par conſequent tout ſujet qui comprend) renferme *O*, d'où il ſuit que tout ſujet qui ıprend *C D* eſt ou comprend *A*. Ainſi *A* eſt Гout epuiſé par *C D*.

EXEMPLE. Quand on parle d' un livre dont : trouve pluſieurs exemplaires, ce livre eſt une :ce compriſe par ces differens exemplaires. Je poſe que ce ſoit un livre polyglotte. S'il n'e- ecrit qu'en François & en Ethiopien, ce livre ›it un Tout epuiſé par deux eſpeces. Mais s'il ecrit encore en d'autres langues, il comprend Tout epuiſé par ces deux eſpeces.

SCHOLIE.

Je laiſſe au mot de Tout ſa ſignification or- aire en diſant que le Tout eſt une eſpece & : ce ſont des genres qui la compoſent. Le toit ne maiſon occupe un certain eſpace, le mur :upe un autre eſpace, la maiſon occupe l'eſpace : le toit occupe & l'eſpace que les murs occu- ıt. La maiſon eſt donc un Tout que compo- t le toit & les murs. Si dix chantres elevent rs voix, chacun a une voix que les autres n'ont , & le chœur eſt un onzieme ſujet qui a la voix chacun de ceux là & que ceux là compoſent ne les conſiderant que comme des perſonnes chantent, ou ce qui revient au même, le chœur ın Tout compoſé de pluſieurs eſpeces dont ıcune eſt compriſe par l' un de ces chantres & ıſiſte à etre un ſujet qui ait une certaine voix. une armée met l'ennemi en deroute, elle fait

ce que fait chaque soldat & un soldat fait ce que l'autre ne fait point. Cette armée est donc un Tout composé de chaque soldat. Si plusieurs hommes d'état deliberant ensemble chacun contribue à rendre les resolutions que l'on prend aussi prudentes qu'elles le sont, c'est le conseil qui est assez prudent pour cela & qui est composé de divers conseillers dont chacun decouvre des veritez que nul autre d'entre eux ne decouvre.

THEOREME II.

Les especes composées qu' epuisent les mêmes composantes sont les mêmes. Soit *A* un Tout epuisé par *C D*. Soit *B* un Tout epuisé aussi par *C D*. *A* & *B* sont le même sujet.

A etant un Tout epuisé par *C D*, tout sujet qui comprend *C D* est *A* ou comprend *A*. Or *B* etant aussi un Tout epuisé par *C D*, *B* comprend *C D* & par consequent *B* est *A* ou comprend *A*. *B* renferme donc l'attribut commun de *A*. Par la même raison *A* renferme l'attribut commun de *B*. D' où il suit par le 14e Theoreme du premier livre que *A* & *B* sont le même sujet.

COROLLAIRE.

Il est aisé de prouver par les Theoremes 15 & 16 du premier livre qu'un Tout etant epuisé par certaines composantes l'espece qui est la même que l'une d'entre elles epuise le Tout avec les autres & que deux especes etant la même les especes qui epuisent l'une epuisent l'autre.

THEO-

THEOREME III.

*Le Tout epuisé par quelques unes des compo-
ıtes qui epuisent un autre Tout composé ce Tout
l'epuise avec les autres composantes.* Soit *A* un
ɔut epuisé par *C D E.* Soit *B* un Tout epuisé
r *C D.* *A* est epuisé par *B E.*

A etant un Tout epuisé par *CDE*, tout sujet
i comprend *C D E* est *A* ou comprend *A.*
C D E etoient telles que tout sujet qui com-
end *C D* fut *A* ou comprit *A*, il seroit superflu
exprimer *E* parmi les composantes qui epui-
ıt *A*, de sorte qu'en disant que tout sujet qui
mprend *C D E* est ou comprend *A* on donne
:ntendre que *C D* n'epuisent point *A.* Or *B*
ant un Tout epuisé par *C D*, tout sujet qui com-
end *C D* est *B* ou comprend *B.* Puis donc
ıe *C D* ne sont pas telles que tout sujet qui les
ımprend soit ou comprenne *A*, il paroit par le
ᵉ & 17ᵉ Theoreme du premier livre que *B* ne
ımprend pas *E.* *A* etant epuisé par *C D E*, *E*
: comprend pas *C*, d'où il suit que *E* ne com-
·end pas *B* & puisque *B* comprend *C*, *E*
est pas *B.*

Comme tout sujet qui comprend *C D* est
ı comprend *B* & que *A* comprend *CD*, *A* est
ou comprend *B.* Or *A* comprenant *E* & *B*
: comprenant pas *E*, *A* n'est pas *B.* *A* com-
·end donc *B.*

Enfin puisque *B* comprend *C D* & que
ıut sujet qui comprend *C D E* est ou comprend

 A, tout

A, tout ſujet qui comprend *B E* eſt ou comprend *A*. Ainſi *A* eſt epuiſé par *B E*.

THEOREME IV.

Chacune des compoſantes qui epuiſent le Tout l'epuiſe avec une autre compoſante. Soit *A* un Tout epuiſé par *E F G H I*. Deux compoſantes dont *I* eſt l'une epuiſent *A*.

A etant un Tout epuiſé par *E F G H I*, on connoit toutes ces compoſantes parceque l'on connoit que tout ſujet qui les comprend toutes eſt *A* ou comprend *A*. Or *par Theor. 1.* *E F* epuiſent un Tout que j'appelle *D*. *A* eſt donc epuiſé par *D G H I par Theor. 3.* Ainſi par la même raiſon *DG* epuiſent un Tout *C* & *A* eſt epuiſé par *CHI*. On trouvera donc enfin un Tout *B* tel que *B I* epuiſent *A*.

THEOREME V.

L'eſpece que le Tout comprend & qui comprend l'une des deux compoſantes qui epuiſent le Tout l'epuiſe avec l'autre compoſante. Soit *A* un Tout epuiſé par *C D*. Soit *B* une eſpece que *A* comprenne & qui comprenne *C*. *A* eſt epuiſé par *BD*.

A etant un Tout epuiſé par *CD*, *C* n'eſt pas *D*, *C* ne comprend pas *D* & n'eſt pas compriſe par *D*, tout ſujet qui comprend *C D* eſt ou comprend *A*, & puisque *A* comprend l'eſpece *B* tout ſujet qui comprend *C D* eſt ou comprend *B*. *B* comprend auſſi *C* par la ſuppoſition. Mais il paroit par le 12e Theoreme du premier livre que *B* n'eſt

eſt pas *A*. *B* n'eſt donc pas un Tout epuiſé par *D par Theor.* 2. & par conſequent *B* ne com- ·end pas *D*. De plus *B* comprenant *C* & *D* : comprenant pas *C*, *D* ne comprend pas *B* : *D* n'eſt pas *B*. Enfin puiſque *B* comprend *C*, ›ut ſujet qui comprend *B D* eſt ou comprend *A*. inſi *A* eſt epuiſé par *B D*.

THEOREME VI.

Si l'une des deux compoſantes qui epuiſent un '*out comprend l'une des deux eſpeces qui epuiſent autre, la premiere epuiſe le Tout avec l'autre eſpece ui compoſe la ſeconde.* Soit *A* un Tout epuiſé ar *C D*. Soit *D* un Tout epuiſé par *E F*. Si ; comprend *E*, *A* eſt epuiſé par *C F*.

A etant un Tout epuiſé par *CD*, *D* ne com- ›rend pas *C*. *D* etant un Tout epuiſé par *E F*, ' n'eſt donc pas *C* & ne comprend pas *C*. Tout ·e qui comprend *E F* eſt ou comprend *D*. Mais 1 etant epuiſé par *C D*, *C* n'eſt pas *D* & ne :omprend pas *D*. Et par conſequent *C* qui par a ſuppoſition comprend *E* ne comprend pas *F*. Donc *C F* epuiſent un Tout *B par Theor.1.* Tout :e qui comprend *E F* etant ou comprenant *D*, *B* eſt ou comprend *D*. Or *B* comprenant *C* & *D* ne comprenant pas *C*, *B* n'eſt pas *D* & par :onſequent *B* comprend *D*. *B* eſt donc epuiſé par *C D par Theor.5.* Donc *A* eſt le même que *B par Theor.* 2. & par conſequent *C F* qui epui- ſent *B* epuiſent *A*.

THEOREME VII.

De deux especes qui epuisent la composante d'un Tout l'une ou l'autre compose le Tout. Soit *A* un Tout, *E* une composante de *A*. Si *E* est un Tout epuisé par *FG*, *F* ou *G* compose *A*.

A etant un Tout & *E* une composante de *A*, *A* est epuisé par *DE par Theor. 4.* *E* etant un Tout epuisé par *FG*, si *D* comprend *F*, *A* est epuisé par *DG par Theor. 6.* & ainsi *G* compose *A*. Si *D* ne comprend pas *F*, comme d' un autre côté, *A* etant epuisé par *DE*, *E* ne comprend pas *D* & que par consequent *F* n'est pas *D* & ne comprend pas *D*, il s'ensuit *par Theor. 1.* que *DF* epuisent un Tout *C*.

Supposé que *C* comprenne *G*. Tout sujet qui comprend *FG* etant ou comprenant *E*, *C* est *E* ou comprend *E*. Or *C* comprenant *D* & *E* ne comprenant pas *D*, *C* n'est pas *E* & par consequent *C* comprend *E*. Donc *C* est epuisé par *DE par Theor. 5.* *A* est donc le même que *C par Theor. 2.* & par consequent *F* qui compose *C* compose *A*.

Supposé que *C* ne comprenne pas *G*. *C* comprenant *D* & *E* ne comprenant pas *D*, *G* que *E* comprend n'est pas *C* & ne comprend pas *C*. *CG* epuisent donc un Tout *B par Theor. 1.* Tout sujet qui comprend *FG* etant ou comprenant *E*, *B* est *E* ou comprend *E*. Or *B* comprenant *C* qui comprend *D* & *E* ne comprenant pas *D*, *B* n'est pas *E* & par consequent *B* com-

comprend *E.* *B* eſt donc epuiſé par *C E par Theor. 5.* Donc *B* eſt epuiſé par *D E par Theor. 6.* *A* eſt donc le même que *B par Theor. 2.* & par conſequent *G* qui compoſe *B* compoſe *A.*

THEOREME VIII.

L'eſpece qui etant compriſe par un Tout n'eſt aucune des deux compoſantes qui epuiſent le Tout & n'eſt compriſe par aucune eſt un Tout epuiſé par deux eſpeces qui ſont telles que l'une de ces compoſantes comprend l'une de ces eſpeces & que l'autre compoſante eſt ou comprend l'autre eſpece. Soit *A* un Tout epuiſé par *BC.* Soit *E* une eſpece que *A* comprenne & qui ne ſoit ni *B* ni *C.* Si *E* n'eſt compriſe ni par *B* ni par *C, E* eſt un Tout epuiſé par deux eſpeces telles que *B* comprend l'une & que *C* eſt ou comprend l'autre.

A etant un Tout epuiſé par *BC*, ſi l'on entend par *O* l'attribut commun de *B* & l'attribut commun de *C*, *A* renferme *O* & parceque tout ſujet qui comprend *B C* renferme l'attribut commun de *A*, tout ſujet qui renferme *O* renferme l'attribut commun de *A*, d'où il ſuit par le 18e Theoreme du premier livre que *O* eſt raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *A.* *A* comprenant l'eſpece *E*, l'attribut commun de *A* & par conſequent *O* eſt raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *E* & puiſque *E* n'eſt ni *B* ni *C* & n'eſt compriſe ni par *B* ni par *C*, il s'enſuit que *E* a deux attributs *P Q* qui expriment enſemble l'attribut commun de *E* & qui ſont tels que *P* a pour rai-
ſon

ſon ſuffiſante l'attribut commun de *B* ſans avoir pour raiſon ſuffiſante l'attribut commun de *C* & que *Q* a pour raiſon ſuffiſante l'attribut commun de *C* ſans avoir pour raiſon ſuffiſante l' attribut commun de *B*. *P* n'eſt donc pas raiſon ſuffiſante de *Q* & *Q* n'eſt pas raiſon ſuffiſante de *P*. *A* renfermant *P Q*, il paroit par le 11[e] Theoreme du premier livre que *P* eſt l'attribut commun d'une eſpece *F* & que *Q* eſt l'attribut commun d'une eſpece *G*. *F* n'eſt pas *G* & *F* ne comprend pas *G* & n'eſt pas compriſe par *G* & puisque *P Q* expriment enſemble l'attribut commun de *E*, *FG* epuiſent *E*. *B* eſt *F* ou comprend *F* & *C* eſt *G* ou comprend *G*. Si *B* etoit *F* & que *C* fut *G*, *A* ſeroit *E par Theor.* 2. Puis donc que *A* comprend *E*, *B* comprend *F* & *C* eſt ou comprend *G*.

THEOREME IX.

L'eſpece qui etant compriſe par un Tout comprend une compoſante de ce Tout eſt compoſée de cette compoſante. Soit *A* un Tout, *C* une compoſante de *A*, *B* une eſpece que *A* comprenne. Si *B* comprend *C*, *C* compoſe *B*.

A etant un Tout & *C* etant une compoſante de *A*, *A* eſt epuiſé par *C D par Theor.* 4. *D* ne comprenant donc pas *C* & l'eſpece *B* comprenant *C*, *D* n'eſt pas *B* & ne comprend pas *B*. *C* auſſi n'eſt pas *B* & ne comprend pas *B* par le 12[e] Theoreme du premier livre. *B* que *A* comprend eſt donc un Tout epuiſé par les eſpeces *G H* telles que *C* eſt ou comprend *G par Theor.* 8. Si

C eſt *G*, *C* compoſe *B* & ſi *C* comprend *G*, *B* eſt epuiſé par *CH par Theor.5.* & ainſi *C* compoſe *B*.

THEOREME X.

L'eſpece qui comprend un Tout epuiſé par deux compoſantes eſt epuiſée par deux eſpeces dont aucune n'eſt ni ne comprend ce Tout & dont l'une comprend l'une de ces compoſantes & l'autre eſt ou comprend l'autre compoſante. Soit *E* un Tout epuiſé par *FG*. Si l'eſpece *A* comprend *E*, *A* eſt un Tout epuiſé par deux eſpeces dont aucune n'eſt ni ne comprend *E* & dont l'une comprend *F* & l'autre eſt ou comprend *G*.

E etant un Tout epuiſé par *FG*, l'attribut commun de *E* eſt raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *F* & de l'attribut commun de *G*. Or l'eſpece *A* comprenant *E*, l'attribut commun de *A* eſt raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *E*. L'attribut commun de *A* eſt donc raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *F* & de l'attribut commun de *G* & par conſequent l'attribut commun de *F* & l'attribut commun de *G* ſervent enſemble à exprimer l'attribut commun de *A*. *A* renferme donc deux attributs *P* *Q* qui expriment enſemble l'attribut commun de *A* & qui ſont tels que *P* eſt raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *F* ſans etre raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *G* & que *Q* eſt raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *G* ſans etre raiſon ſuffiſante de l'attribut commun de *F*. *P* n'eſt donc pas raiſon ſuffiſante de *Q* & *Q* n'eſt pas raiſon

raiſon ſuffiſante de *P*. *A* renfermant *P Q*, il paroit par le 11ᵉ Theoreme du premier livre que *P* eſt l'attribut commun d'une eſpece *B* & que *Q* eſt l'attribut commun d'une eſpece *C*. *B* n'eſt pas *C* & *B* ne comprend pas *C* & n'eſt pas compriſe par *C* & puiſque *P Q* expriment enſemble l'attribut commun de *A*, *B C* epuiſent *A*. *B* ne renfermant pas *Q* & *C* ne renfermant pas *P*, *E* qui renferme *P* & *Q* n'eſt ni *B* ni *C* & *E* n'eſt compriſe ni par *B* ni par *C*. *B* eſt ou comprend *F* & *C* eſt ou comprend *G*. Si *B* etoit *F* & que *C* fut *G*, *A* ſeroit *E par Theor. 2.* Puis donc que *A* comprend *E*, *B* comprend *F* & *C* eſt ou comprend *G*.

COROLLAIRE.

Suppoſons que *F* ne comprenne aucune eſpece qui compoſe *G* & que *G* ne comprenne aucune eſpece qui compoſe *F*. Comme toute compoſante de *F* ou de *G* ſert à exprimer *A*, il paroit auſſi que *A* eſt epuiſée par deux compoſantes *B C* telles que *B* ne comprend ni *G* ni aucune compoſante de *G* & que *C* ne comprend ni *F* ni aucune compoſante de *F*. L'eſpece qui comprend un Tout epuiſé par deux compoſantes dont aucune ne comprend une compoſante de l'autre eſt epuiſée par deux eſpeces dont l'une ne comprend ni la premiere de ces compoſantes ni aucune eſpece qui la compoſe & l'autre ne comprend ni la ſeconde de ces compoſantes ni aucune eſpece qui la compoſe.

THEO-

THEOREME XI.

Si un Tout est epuisé par deux composantes dont l'une comprenne une espece qui compose l'autre, la premiere epuise le Tout avec une espece que la seconde comprend & qui n'a point de composante que la premiere comprenne. Soit *A* un Tout epuisé par *B C.* Soit *D* une espece qui compose *C.* Si *B* comprend *D*, *A* est epuisé par *B* & une autre espece que *C* comprend & qui n'a point de composante que *B* comprenne.

A etant un Tout epuisé par *B C*, l'attribut commun de *B* & l'attribut commun de *C* expriment ensemble l'attribut commun de *A*. Or *C* etant un Tout que *D* compose, *C* est epuisée par *D E par Theor. 4.* & puisque *B* comprend *D*, *B E* epuisent *A par Theor. 6.* & par consequent l'attribut commun de *B* & l'attribut commun de *E* expriment ensemble l'attribut commun de *A*. L'expression de *A* par *B* & *C* a donc quelque chose de superflu, savoir l'expression de *D*. On exprimera donc *A* par *B* & par une autre espece *F* sans que l'expression de *F* ait rien de superflu. *B F* epuisent *A*, *B* ne comprend aucune espece qui compose *F* & il paroit aussi *par Theor. 8.* que *C* comprend *F.*

DEFINITION II.

La *Partie* d'un Tout en est une composante qui n'est pas composée d'une espece qui ne compose pas le Tout. Soit *A* un Tout. Soit *B* une espece qui compose *A*. Si *B* n'est pas com-

composée ou si toute espece qui compose *B* compose *A*, *B* est une Partie de *A*.

THEOREME XII.

Si un Tout est epuisé par deux composantes dont l'une ne soit pas une partie du Tout, elle en comprend une partie qui epuise le Tout avec l'autre composante. Soit *A* un Tout epuisé par *B C*. Si *C* n'est pas une partie de *A*, *C* comprend une espece qui est partie de *A* & qui avec *B* epuise *A*.

A etant un Tout epuisé par *B C* & *C* n'etant pas une partie de *A*, une espece *E* qui compose *C* ne compose point *A*. *C* est epuisée par *D E par Theor. 4.* & puisque *E* ne compose point *A*, *B* ne comprend pas *D par Theor. 6.* Si donc *B* ne comprend point *E*, de ces trois especes *B D E* il n'y en a pas deux qui soient la même ou dont l'une comprenne l'autre & par consequent puisque *E* ne compose point *A* il paroit *par Defin. 1.* que *B D* epuisent *A*. *E* est donc epuisée par les especes *F G* qui sont telles que *B* comprend *F* & que *D* comprend *G par Theor. 8.* d'où il suit *par Theor. 6.* que *D F* epuisent *C*. Ainsi soit que *B* comprenne *E* ou non, *B* comprend une espece qui compose *C*.

Une espece *H* qui est comprise par *C* est donc telle que *B H* epuisent *A* & que *B* ne comprend aucune espece qui compose *H par Theor. 11.* Ce que l'on vient de prouver fait donc voir que *H* n'est pas composée d'une espece qui ne compose point *A*. *H* est donc une partie de *A*.

EXEM-

EXEMPLE. Je ſuppoſe qu'un livre ſoit ecrit en François & en Ethiopien. Le François etant une langue Europeenne, ce livre eſt un Tout epuiſé par deux compoſantes l'ecrit François, l'ecrit Ethiopien & Europeen. Cette ſeconde compoſante eſt epuiſée par deux eſpeces l'ecrit Ethiopien, l'ecrit Europeen & cette derniere eſpece ne compoſe point le Tout. Mais cette derniere eſpece etant compriſe par la premiere compoſante par l'ecrit François, la ſeconde compoſante comprend l'ecrit Ethiopien une eſpece qui eſt partie du Tout & qui avec la premiere compoſante epuiſe le Tout. La ſeconde compoſante l'ecrit Ethiopien & Europeen eſt auſſi epuiſée par ces deux eſpeces l'ecrit Ethiopien, l'ecrit Europeen & Africain. Mais cette ſeconde eſpece etant epuiſée par deux autres dont l'une l'ecrit Africain eſt compriſe par la premiere par l'ecrit Ethiopien & l'autre l'ecrit Europeen eſt compriſe par l'ecrit François par la premiere compoſante du Tout, il eſt vrai encore que la ſeconde compoſante comprend l'ecrit Ethiopien qui eſt une partie du Tout & qui avec la premiere compoſante epuiſe le Tout.

THEOREME XIII.

La partie de la partie eſt partie du Tout. Soit *B* une partie de *A*. Si *C* eſt partie de *B*, *C* eſt partie de *A*.

B etant partie de *A* & *C* etant partie de *B*, *C* qui compoſe *B* compoſe *A*. Si *C* n'eſt pas une eſpece compoſée, *C* eſt donc partie de *A*. Si *C* eſt une eſpece compoſée, toute eſpece qui

composé *C* composant *B* & toute espece qui compose *B* composant *A*, toute espece qui compose *C* compose *A*. Donc *C* est partie de *A*.

THEOREME XIV.

La partie est partie de l'espece qui la comprend & qui est comprise par le Tout. Soit *C* une partie de *A*. Soit *B* une espece que *A* comprenne. Si *B* comprend *C*, *C* est partie de *B*.

C etant partie de *A* compose *A* & par consequent puisque *A* comprend l'espece *B* & que *B* comprend *C*, *C* compose *B* *par Theor. 9.* De plus *C* n'etant composée d'aucune espece que *B* ne comprenne & qui ne compose *A*, *C* n'est composée d'aucune espece qui ne compose *B*. Donc *C* est partie de *B*.

THEOREME XV.

L'espece epuisée par quelques parties d'un Tout est ce Tout ou une partie de ce Tout. Soient *D E F* des parties de *A*. Soit *B* un Tout epuisé par *D E F*. Si *B* n'est pas *A*, *B* est partie de *A*.

B etant un Tout epuisé par *D E F*, tout sujet qui comprend *D E F* est ou comprend *B*. *D E F* etant des parties de *A* & *A* n'etant pas *B*, *A* comprend donc *B* & par consequent *B* compose *A* *par Theor. 5.* Or les deux parties *D E* epuisent un Tout *C* *par Theor. 1.* *B* comprend *C* *par Theor. 3.* *A* comprenant donc *C*, *C* compose *A* *par Theor. 5.*

Soit

Soit *H* une eſpece qui compoſe *C*. Si *H* eſt *D*, *H* compoſe *A*. Si *H* comprend *D*, *H* compoſe *A par Theor. 5*. Si *D* comprend *H*, *H* compoſe *D par Theor. 9*. & *D* etant partie de *A*, *H* compoſe *A*. Si *H* n'eſt ni *D* ni *E* & que *H* ne comprenne ni *D* ni *E* & ne ſoit compriſe ni par *D* ni par *E*, *H* eſt epuiſée par deux eſpeces *I K* telles que *D* comprend *I* & que *E* comprend *K par Theor. 8*. *I* ou *K* compoſe *C par Theor. 7*. Si donc *I* compoſe *C*, *I* compoſe *D par Theor. 9*. & par conſequent *I* compoſe *A*, d'où il ſuit *par Theor. 5*. que *H* compoſe *A*. *C* n'ayant donc point de compoſante qui ne compoſe *A*, *C* eſt partie de *A*.

Or *D E* epuiſant *C*, *B* que *D E F* epuiſent eſt epuiſée par *C F par Theor. 3*. *B* eſt donc auſſi partie de *A*.

COROLLAIRE.

Il paroit donc par ce Theoreme & le precedent que *D E F* qui ſont parties de *A*, ſont parties de *B*. Les compoſantes qui epuiſent un Tout en ſont des parties ſi elles ſont parties d'un autre Tout.

DEFINITION III.

Deux differentes parties & dont aucune n'eſt partie de l'autre ſont *coordonnées* ſi aucune eſpece n'eſt partie de l'une & de l'autre. Soit *A* un Tout compoſé des parties *B C* telles que *B* ne ſoit pas *C*, que *B* ne ſoit pas partie de *C* & que

C ne ſoit pas partie de *B*. Si *B* n' a aucune partie qui ſoit partie de *C*, *B* & *C* ſont des parties coordonnées.

THEOREME XVI.

Si deux parties qui epuiſent un Tout ne ſont pas coordonnées, chacune comprend une partie qui eſt coordonnée à l'autre & qui epuiſe le Tout avec l'autre. Soient *B C* deux parties qui epuiſent *A*. Si *B C* ne ſont pas coordonnées, *C* comprend une eſpece *E* qui eſt partie de *A* & qui eſt telle que *B E* epuiſent *A* & que *B E* ſont des parties coordonnées.

B C etant des parties qui epuiſent *A*, *B* n'eſt pas *C*, *B* n'eſt pas partie de *C* & *C* n'eſt pas partie de *B*. Puis donc que *B C* ne ſont pas coordonnées, une eſpece qui eſt partie de *B* eſt partie de *C*. *C* comprend donc une eſpece *D* telle que *B D* epuiſent *A* & que *D* n'eſt compoſée d' aucune eſpece que *B* comprenne *par Theor. 11.* Si *D* n'eſt pas partie de *A*, *D* comprend une eſpece *E* qui eſt partie de *A* & qui eſt telle que *B E* epuiſent *A par Theor. 12.* *E* eſt donc auſſi partie de *D par Theor. 14.* & par conſequent *E* n'eſt compoſée d'aucune eſpece que *B* comprenne. Aucune partie de *E* n' eſt donc partie de *B* & puiſque *B E* epuiſent *A*, *B* n'eſt pas *E*, *B* n'eſt pas partie de *E* & *E* n' eſt pas partie de *B*. Donc *B E* ſont des parties coordonnées.

EXEM-

EXEMPLE. Si un livre eſt ecrit en François en Arabe & en Ethiopien, ce livre eſt un Tout epuiſé par deux parties l'ecrit François & Arabe, l'ecrit Arabe & Ethiopien. Mais l'une & l'autre de ces parties etant compoſée d'une même eſpece, la ſeconde comprend l'ecrit Ethiopien une eſpece qui epuiſe le Tout avec la premiere l'ecrit François & Arabe & qui n'eſt compoſée d'aucune eſpece que la premiere comprenne. Ces deux eſpeces qui epuiſent le Tout en ſont des parties coordonnées.

THEOREME XVII.

La partie epuiſe le Tout avec une autre partie qui eſt coordonnée à celle là. Soit *B* une partie de *A*. *A* eſt epuiſé par les parties coordonnées *B E.*

B etant partie de *A*, *A* eſt epuiſé par les compoſantes *B C par Theor. 4.* Si *C* n'eſt pas partie de *A*, *C* comprend une eſpece *D* qui eſt partie de *A* & qui eſt telle que *B D* epuiſent *A par Theor. 12.* Et ſi *B D* ne ſont pas coordonnées, *D* comprend une eſpece *E* qui eſt partie de *A* & qui eſt telle que *B E* epuiſent *A* & que *B E* ſont des parties coordonnées *par Theor. 16.*

THEOREME XVIII.

La partie coordonnée à une autre eſt coordonnée à toutes les parties de l'autre. Soient *B C* deux parties de *A*. Soit *D* une partie de *C*. Si *B C* ſont coordonnées, *B D* ſont coordonnées.

B C etant des parties coordonnées de *A*, *D* qui eſt partie de *C* n'eſt pas *B* & n'eſt pas partie de *B*. *B* auſſi n'etant pas partie de *C*, *B* n'eſt pas partie de *D par Theor. 13.* & aucune partie de *C* n'etant partie de *B*, aucune partie de *D* n'eſt partie de *B*. Donc *B D* ſont des parties coordonnées.

THEOREME XIX.

Si un Tout epuiſé par deux compoſantes comprend une eſpece qui ne ſoit aucune de ces compoſantes & qui ne ſoit compriſe par aucune, cette eſpece eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt compriſe par la premiere compoſante & l'autre eſt la ſeconde ou eſt compriſe par la ſeconde. Soit *A* un Tout epuiſé par *B C*. Soit *O* une eſpece qui ne ſoit ni *B* ni *C* & qui ne ſoit compriſe ni par *B* ni par *C*. Si *A* comprend *O*, *O* eſt un Tout epuiſé par deux coordonnées dont l'une eſt compriſe par *B* & l'autre eſt *C* ou eſt compriſe par *C*.

A etant un Tout epuiſé par *B C* & comprenant l'eſpece *O* qui n'eſt ni *B* ni *C* & qui n'eſt compriſe ni par *B* ni par *C*, *O* eſt epuiſée par les compoſantes *P S* telles que *B* comprend *P* & que *C* eſt *S* ou comprend *S par Theor. 8.* Si *P* n'eſt pas partie de *O*, *P* comprend *Q* qui eſt partie de *O* & telle que *Q S* epuiſent *O par Theor. 12.*

Si *S* eſt partie de *O* & que *Q S* ne ſoient pas coordonnées, *Q* comprend une eſpece *R* qui eſt

eſt telle que *R S* epuiſent *O* & que *R S* ſont coordonnées *par Theor. 16.* *O* eſt donc epuiſée par deux coordonnées *R S* telles que *B* comprend *R* & que *C* eſt ou comprend *S.*

Si *S* n'eſt pas partie de *O*, *S* comprend *T* qui eſt partie de *O* & telle que *Q T* epuiſent *O* & ſi *Q T* ne ſont pas coordonnées, *T* comprend *V* qui eſt telle que *Q V* epuiſent *O* & que *Q V* ſont coordonnées. *O* eſt donc epuiſée par deux coordonnées *Q V* telles que *B* comprend *Q* & que *C* comprend *V.*

COROLLAIRE I.

Si *O* eſt partie de *A*, *Q* eſt partie de *A* & de *B par Theor. 13 & 14.* Si un Tout epuiſé par deux compoſantes a une partie qui ne ſoit aucune de ces compoſantes & qui ne ſoit partie d'aucune, cette partie eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt partie de la premiere compoſante & l'autre eſt la ſeconde ou partie de la ſeconde.

COROLLAIRE II.

Si *O* ne compoſe point *A*, *C* n'eſt pas *S par Theor. 5.* & par conſequent *C* comprend *S*. Si un Tout epuiſé par deux compoſantes comprend une eſpece qui ne le compoſant pas ne ſoit compriſe par aucune de ces compoſantes, cette eſpece eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt compriſe par la premiere compoſante & l'autre par la ſeconde.

THEOREME XX.

Si de deux compoſantes qui epuiſent un Tout l'une n'eſt pas partie de ce Tout, l'autre comprend une eſpece qui eſt partie de la premiere & qui ne compoſe pas le Tout. Soit *A* un Tout epuiſé par les compoſantes *B C*. Si *C* n'eſt pas partie de *A*, *B* comprend une eſpece qui eſt partie de *C* & qui ne compoſe point *A*.

Le Tout *A* etant epuiſé par les compoſantes *B C* & *C* n'etant pas partie de *A*, *C* comprend une eſpece *D* qui eſt partie de *A* & telle que *B D* epuiſent *A par Theor. 12.* *C* n'etant pas partie de *A*, une eſpece *K* qui compoſe *C* ne compoſe point *A*.

Suppoſé que *K* ſoit partie de *C*. Toute partie de *D* etant *par Theor. 13.* partie de *A*, *K* qui ne compoſe point *A* n'eſt point partie de *D*. Donc *par Theor. 14.* *D* ne comprend point *K*. Toute partie de *K* etant partie de *C* & aucune partie de *K* ne compoſant *A par Theor. 5.* aucune partie de *K* n'eſt partie de *D* & par conſequent *D* ne comprend auſſi aucune partie de *K*. Donc *par Theor. 19. Cor. 2.* *B* comprend *K*.

Suppoſé que *K* ne ſoit pas partie de *C*. *K* comprend une eſpece *L* qui eſt partie de *C par Theor. 12.* & qui *par Theor. 5.* ne compoſe point *A*. On prouvera donc que *B* comprend *L*. *B* comprend donc une eſpece qui eſt partie de *C* & qui ne compoſe point *A*.

COROL-

COROLLAIRE.

On voit auſſi qu'il ſuffit que *K* ſoit partie de *C* pour etre compriſe par *B*. Si deux compoſantes epuiſent un Tout, toute partie de l'une qui ne compoſe point le Tout eſt compriſe par l'autre.

THEOREME XXI.

Si une partie & une compoſante epuiſent un Tout, la partie coordonnée à celle là eſt la compoſante ou partie de la compoſante. Soient *B D* des parties coordonnées de *A*. Si *A* eſt epuiſé par *B C*, *D* eſt *C* ou partie de *C*.

B D etant des parties coordonnées de *A*, aucune partie de *D* n'eſt *B* & aucune partie de *D* n'eſt partie de *B*. *D* n'eſt donc pas un Tout epuiſé par deux coordonnées dont l'une ſoit *B* ou partie de *B*. Or *B D* etant coordonnées, *D* n'eſt pas *B* ni partie de *B*. *A* etant epuiſé par *B C*, *D* eſt donc *C* ou partie de *C* *par Theor.19. Coroll. 1.*

THEOREME XXII.

Un Tout epuiſé par deux coordonnées etant partie d'un Tout epuiſé par deux compoſantes, l'une de ces coordonnées du premier eſt partie de l'une de ces compoſantes du ſecond ſi l'autre coordonnée du premier eſt l'autre compoſante du ſecond. Soit *A* un Tout epuiſé par *C D*. Soit *B* un Tout epuiſé par les coordonnées *C E*. Si *B* eſt partie de *A*, *E* eſt partie de *D*.

 A etant

A etant un Tout epuifé par *C D* & *B* etant partie de *A*, *B* n'eft pas *A*, d'où il fuit que *B* n'eft pas epuifé par *C D*. *B* etant epuifé par *C E*, *E* n'eft donc pas *D*. Or *C E* etant parties de *B* font parties de *A* & *C E* etant coordonnées, *E* eft donc partie de *D par Theor. 21.*

THEOREME XXIII.

La partie qui epuifant le Tout avec l'une des deux coordonnées qui l'epuifent eft coordonnée à celle là eft la même que l'autre. Soit *A* un Tout epuifé par les coordonnées *B C*. Si *A* eft auffi epuifé par les coordonnées *B D*, *C* eft *D*.

A etant epuifé par *B C* & par les coordonnées *B D*, *D* eft *C* ou partie de *C par Theor. 21.* *C* n'eft donc pas partie de *D*. Or *B C* etant des parties coordonnées, *C* eft *D* ou partie de *D*. *C* eft donc *D*.

THEOREME XXIV.

Un Tout epuifé par deux compofantes eft partie d'un Tout epuifé par deux coordonnées, fi l'une de ces compofantes du premier etant l'une de ces coordonnées du fecond l'autre compofante du premier eft partie de l'autre coordonnée du fecond. Soit *A* un Tout epuifé par les coordonnées *C D*. Soit *B* un Tout epuifé par *C E*. Si *E* eft partie de *D*, *B* eft partie de *A*.

A etant epuifé par les coordonnées *C D* & *E* etant partie de *D*, *E* eft partie de *A par Theor. 13.* & *C E* font coordonnées *par Theor. 18.*

A n'eft

A n'eſt donc pas epuiſé par *C E* *par Theor. 23.* *B* etant epuiſé par *C E*, *B* n'eſt donc pas *A*. Donc *par Theor. 15.* *B* eſt partie de *A*.

THEOREME XXV.

La partie qui epuiſant le Tout avec l'une de pluſieurs coordonnées qui l'epuiſent eſt coordonnée à celle là eſt epuiſée par les autres. Soit *A* un Tout epuiſé par les coordonnées *E F G H*. Si *A* eſt epuiſé par les coordonnées *B H*, *E F G* epuiſent *B*.

A etant un Tout epuiſé par les coordonnées *E F G H*, *A* n'eſt pas epuiſé par *E H*. *A* etant epuiſé par les coordonnées *B H*, *E* n'eſt donc pas *B*, d'où il ſuit *par Theor. 21.* que *E* eſt partie de *B*. Par la même raiſon *F* & *G* ſont parties de *B*. *E F* epuiſent un Tout *D* *par Theor. 1.* & *D* eſt *B* ou partie de *B* *par Theor. 15.* Or *D G H* epuiſent *A* *par Theor. 3.* *A* n'eſt donc pas epuiſé par *D H* & par conſequent *D* n'eſt pas *B*. *D* eſt donc partie de *B*.

D G epuiſent un Tout *C* qui eſt *B* ou partie de *B*. Or puiſque *C* n'eſt pas *D* & que tout ſujet qui comprend *E F G* comprend *D G*, il paroit que *E F G* epuiſent *C*. *C* n'eſt donc pas partie de *B* qui comprend *E F G*. *C* eſt donc *B* & par conſequent *E F G* epuiſent *B*.

THEOREME XXVI.

Pluſieurs parties d'un Tout etant coordonnées, l'eſpece epuiſée par quelquesunes eſt une partie de ce Tout coordonnée aux autres. Soient *D E F G* des

des parties coordonnées de *A*. Si *C* est epuisé par *D E F*, *C* est partie de *A* & *C G* sont coordonnées.

DEFG etant des parties coordonnées de *A*, *A* est epuisé par les coordonnées *B G par Theor. 17.* Chacune des parties *D E F* est donc *B* ou partie de *B par Theor. 21.* Or *E* n'est ni *D* ni partie de *D*. *D* n'est donc pas *B* & par consequent *D* est partie de *B*. Par la même raison *E* & *F* sont parties de *B*. *C* etant epuisé par *DEF*, *C* est donc *B* ou partie de *B par Theor. 15.* Il paroit donc *par Theor. 13.* que *C* est partie de *A* & *par Theor. 18.* que *C G* sont coordonnées.

THEOREME XXVII.

Si un Tout est epuisé par plusieurs parties coordonnées, les coordonnées qui epuisent l'une de ces parties epuisent le Tout avec les autres. Soit *A* un Tout epuisé par les coordonnées *D E F*. Si *F* est epuisée par les coordonnées *G I K*, *A* est epuisé par *DEGIK*.

A etant epuisé par les coordonnées *D E F*, *A* est epuisé par les coordonnées *C F par Theor. 17.* *C* est epuisée par *D E par Theor. 25.* *F* etant epuisée par les coordonnées *G I K*, *F* est epuisée par les coordonnées *G H* & *H* est epuisée par *I K*. *A* etant epuisé par *C F* & *C G* etant coordonnées *par Theor. 18.* *A* n'est pas epuisé par *C G par Theor. 23.* Or tout sujet qui comprend *C G H* est ou comprend *F* & *F* ne comprenant pas *C*, tout sujet qui comprend *C G H* com-

comprend *CF.* Tout ſujet qui comprend *CGH* eſt donc *A* ou comprend *A* & par conſequent *CGH* epuiſent *A*.

A eſt epuiſé par les coordonnées *B H par Theor. 17.* & *B* eſt epuiſée par *C G par Theor. 25.* *A* etant epuiſé par *BH* & *B I* etant coordonnées *par Theor. 18. B I* epuiſent un Tout qui eſt partie de *A par Theor. 1. & 24.* Tout ſujet qui comprend *B I* comprend *C G I. C G I* etant donc compriſes par une partie de *A*, *A* n'eſt pas epuiſé par *C G I.* Or tout ſujet qui comprend *CGIK* eſt ou comprend *H* & *H* ne comprenant pas *G*, tout ſujet qui comprend *C G I K* comprend *CGH.* Tout ſujet qui comprend *CGIK* eſt donc *A* ou comprend *A* & par conſequent *CGIK* epuiſent *A*.

A etant epuiſé par *C F* & *E F* etant coordonnées *par Theor. 18. E F* epuiſent un Tout qui eſt partie de *A par Theor. 1. & 24.* Tout ſujet qui comprend *E F* comprend *E G I K. EGIK* etant donc compriſes par une partie de *A*, *A* n'eſt pas epuiſé par *E G I K.* Or tout ſujet qui comprend *D E G I K* eſt ou comprend *C* & *C* ne comprenant pas *G*, tout ſujet qui comprend *D E G I K* comprend *C G I K.* Tout ſujet qui comprend *D E G I K* eſt donc *A* ou comprend *A* & par conſequent *DEGIK* epuiſent *A*.

THEOREME XXVIII.

Si pluſieurs parties ſont coordonnées, ces parties epuiſent un Tout. Soient *EFGH* des parties coor-

coordonnées d'un Tout *A*. *E F G H* epuifent un Tout.

EFGH etant des parties coordonnées de *A*, *E F* epuifent un Tout *D par Theor. 1.* *D* eft partie de *A* & *D G* font coordonnées *par Theor. 26.* *DG* epuifent donc un Tout *C*. *C* etant epuifé par *DG* & *D* etant epuifé par *EF*, *EFG* epuifent *C par Theor. 27.*

C eft partie de *A* & *CH* font coordonnées *par Theor. 26.* *C H* epuifent donc un Tout *B par Theor. 1.* *B* etant epuifé par *C H* & *C* etant epuifé par *EFG*, *E F G H* epuifent *B par Theor. 27.*

THEOREME XXIX.

Si un Tout eft epuifé par plufieurs coordonnées, la partie du Tout qui n'eft aucune de celles là & qui n'eft partie d'aucune eft epuifée par des coordonnées dont chacune eft quelqu'une de celles là ou partie de quelqu'une. Soit *A* un Tout epuifé par les coordonnées *E F G H I*. Soit *O* une partie de *A*. Si *O* n'eft aucune des parties *EFGHI* ni partie d'aucune d'entre elles, *O* eft epuifée par des coordonnées dont chacune eft quelqu'une des parties *E F G H I* ou partie de quelqu'une d'entre elles.

A etant epuifé par les coordonnées *EFGHI*, *A* eft epuifé par les coordonnées *BI par Theor. 17.* & *B* eft epuifée par *E F G H par Theor. 25.* *O* etant partie de *A* & n'etant ni *I* ni partie de *I*, *O* n'eft pas coordonnée à *B par Theor. 21.*

Donc

Donc *O* n'eſt pas coordonnée à chacune des parties *EFGH par Theor.* 26.

Suppoſons que *O* ſoit coordonnée à *I* & à *H* & que *O* ne ſoit coordonnée à aucune des parties *EFG*. *O* eſt *B* ou partie de *B par Theor.* 21. *B* eſt epuiſée par les coordonnées *CH par Theor.* 17. & *C* eſt epuiſée par *EFG par Theor.* 25. *O* eſt *C* ou partie de *C par Theor.* 21. Si *O* eſt *C*, *O* eſt epuiſée par *EFG*.

Si *O* eſt partie de *C*, *C* etant epuiſée par les coordonnées *DG par Theor.* 17. & *D* etant epuiſée par *EF*, aucune partie de *G* n'eſt partie de *D* & par conſequent *O* qui n'eſt pas coordonnée à *G* n'eſt pas *D* ni partie de *D*. *O* par la ſuppoſition n'etant ni *G* ni partie de *G*, *O* eſt donc epuiſée par les coordonnées *PS* telles que *P* eſt *D* ou partie de *D* & que *S* eſt *G* ou partie de *G par Theor.* 21. *Cor.* 1. Si *P* eſt *D*, *P* eſt epuiſée par *EF*.

Si *P* eſt partie de *D*, comme *O* n'eſt pas coordonnée à *E* & que *S* qui eſt *G* ou partie de *G* eſt coordonnée à *E*, il s'enſuit *par Theor.* 26. que *P* n'eſt pas coordonnée à *E*. Par la même raiſon *P* n'eſt pas coordonnée à *F*. Aucune partie de *E* n'etant partie de *F*, il s'enſuit donc que *P* n'eſt ni *E* ni partie de *E* ni *F* ni partie de *F*. Donc *par Theor.* 19. *Cor.* 1. *P* eſt epuiſée par les coordonnées *QR* telles que *Q* eſt *E* ou partie de *E* & que *R* eſt *F* ou partie de *F*. Or *PS* epuiſant *O*, *QRS* epuiſent *O par Theor.* 27.

O eſt

O eſt donc epuiſée par des coordonnées dont chacune eſt ou la même que quelqu'une des coordonnées *E F G H I* ou partie de quelqu'une d'entre elles.

THEOREME XXX.

L'eſpece qui comprend un Tout epuiſé par deux coordonnées eſt epuiſée par deux coordonnées dont aucune n'eſt ni ne comprend ce Tout & dont l'une comprend la premiere de ces coordonnées du Tout & l'autre eſt ou comprend la ſeconde. Soit *O* un Tout epuiſé par les coordonnées *P Q.* Soit *A* une eſpece qui comprenne *O.* *A* eſt un Tout epuiſé par deux coordonnées dont aucune n'eſt ni ne comprend *O* & dont l'une comprend *P* & l'autre eſt ou comprend *Q.*

O etant un Tout epuiſé par les coordonnées *P Q*, aucune partie de *Q* n'eſt partie de *P* & comme *Q* n'a point de partie qui ne ſoit partie de *O par Theor. 13.* *P* ne comprend aucune partie de *Q par Theor. 14.* Donc *par Theor. 12.* *P* ne comprend aucune compoſante de *Q.* Par la même raiſon *Q* ne comprend aucune compoſante de *P.* L'Eſpece *A* qui comprend *O* eſt donc epuiſée par deux compoſantes *B C* telles que *B* ne comprend ni *Q* ni aucune compoſante de *Q* & que *C* ne comprend ni *P* ni aucune compoſante de *P par Theor. 10. Cor.* Si *B C* ne ſont pas des parties de *A*, *D F* qui ſont des parties de *A* ſont telles que *B* comprend *D*, que *C* comprend *F* & que *D E* epuiſent *A par Theor. 12.* Si *D F* ne ſont pas des parties coordonnées

nées, *D* comprend *E* partie de *A* & telle que *EF* epuiſent *A* & que *EF* ſont coordonnées *par Theor. 16.*

E ne comprenant ni *Q* ni aucune compoſante de *Q*, *F* eſt *Q* ou comprend *Q par Theor. 8.* & *F* ne comprenant ni *P* ni aucune compoſante de *P*, *E* eſt *P* ou comprend *P*. Si *E* etoit *P* & que *F* fut *Q*, *A* ſeroit *O par Theor. 2.* Puis donc que *A* comprend *O*, *E* comprend *P* & *F* eſt ou comprend *Q*.

E ne comprenant pas *Q*, *E* n'eſt pas *O* & ne comprend pas *O*. Par la même raiſon *F* n'eſt pas *O* & ne comprend pas *O*.

COROLLAIRE I.

Si *O* eſt partie de *A*, *P* eſt partie de *A* & de *E par Theor. 13 & 14.* Si deux coordonnées epuiſent la partie d'un Tout, ce Tout eſt epuiſé par deux coordonnées telles que l'une de ces coordonnées de la partie eſt partie de la premiere de ces coordonnées du Tout & que l'autre eſt la ſeconde ou partie de la ſeconde.

COROLLAIRE II.

Si *O* ne compoſe pas *A*, *F* n'eſt pas *Q par Theor. 5.* & par conſequent *F* comprend *Q*. Si un Tout compris par une eſpece & epuiſé par deux coordonnées ne la compoſe pas, cette eſpece eſt epuiſée par deux coordonnées dont aucune ne comprend ce Tout & dont l'une comprend la premiere de ces coordonnées du Tout & l'autre comprend la ſeconde.

DEFINITION IV.

La *Quantité* eſt une eſpece qui en comprend une autre dont elle n'eſt pas compoſée & que ne comprend aucune partie de la premiere. Cette ſeconde eſpece eſt la *Meſure* de la quantité. Soit *A* une eſpece qui comprenne l'eſpece *O*. Si *O* ne compoſe point *A* & qu'aucune partie de *A* ne comprenne *O*, *A* eſt une Quantité & *O* eſt la Meſure de *A*.

THEOREME XXXI.

Si chaque partie d'un Tout comprenant une partie d'un autre Tout le premier n'a pas deux coordonnées qui comprennent la même partie du ſecond & que le ſecond n'ait pas deux coordonnées qui ne ſoient compriſes par des coordonnées du premier, le premier eſt une quantité dont le ſecond eſt la meſure. Soient *A* & *O* deux eſpeces compoſées telles que chaque partie de *A* comprenne une partie de *O*. Si *A* n'a pas deux coordonnées qui comprennent la même partie de *O* & que *O* n'ait pas deux coordonnées ſans que deux coordonnées de *A* ſoient telles que l'une comprenne la premiere de ces coordonnées de *O* & l'autre la ſeconde, *A* eſt une quantité dont *O* eſt la meſure.

AO etant des eſpeces compoſées, ſoit *Q* une partie de *O*. *O* eſt epuiſé par les coordonnées *PQ par Theor. 17.* Puiſque *O* n'a pas deux coordonnées qui ne ſoient compriſes par des coordonnées de *A*, *Q* eſt compriſe par *C* partie de *A* & *P* eſt compriſe par une partie de *A* qui eſt coor-

coordonnée à *C*. *A* eſt epuiſé par les coordonnées *B C*. Il paroit donc *par Theor. 21.* que *B* comprend *P*. Soit *D* une partie de *C*. Un Tout epuiſé par *B D* eſt partie de *A par Theor. 24.* *A* n'eſt donc pas epuiſé par deux coordonnées dont l'une ſoit partie de *C* ou compriſe par *C par Theor. 14.* & l'autre ſoit compriſe par *B*. *A* n'eſt donc pas epuiſé par *P Q* & par conſequent *A* n'eſt pas *O*. Puisque *A* comprend *P Q*, *A* comprend donc *O*.

Comme deux coordonnées de *A* ne comprennent pas la même partie de *O*, *C* ne comprend ni *P* ni aucune partie de *P*. *C* eſt epuiſée par les coordonnées *D E* & comme chaque partie de *A* comprend une partie de *O*, *E* comprend une partie de *O* laquelle n'etant ni *P* ni partie de *P* eſt *Q* ou partie de *Q par Theor. 19. Cor. 1.* Il ſuit de là que *Q* n'eſt pas *D* une partie de *C*. *Q* que *C* comprend n'eſt donc pas partie de *A par Theor. 14.* Or puisqu'aucune partie de *O* n'eſt partie de *A*, *O* n'eſt pas partie de *A par Theor. 13.* & *O* qui eſt compriſe par *A* ne comprend *par Theor. 14.* aucune partie de *A*. Donc *par Theor. 12.* *O* ne compoſe point *A*.

C ne comprenant pas *P*, *C* ne comprend pas *O*. Puis donc que *A* comprend *O*, que *O* ne compoſe point *A* & qu'aucune partie de *A* ne comprend *O*, *A* eſt une quantité dont *O* eſt la meſure.

EXEMPLE. Si un Prince exige de chacun de ſes Vaſſaux un homme, un cheval, un fuſil,

 une

une epée, l'homme qu'il exige de l'un des Vaſſaux n'eſt pas le même que celui qu'il exige d'un autre & il en faut dire autant du cheval, du fuſil & de l'epée. L'homme qui ſera fourni par le premier Vaſſal aura bien des attributs que n'aura pas l'homme fourni par le ſecond. Mais la declaration du Prince ne faiſant pas mention de ces attributs, les differens hommes qu'il exige ne ſont conſiderés que comme des ſujets qui comprennent l'eſpece Homme & qui ſont differens entre eux. En diſtinguant donc ces differens hommes de l'eſpece qu'ils comprennent & ces differens chevaux de l'eſpece qu'ils comprennent & chaque partie de ce que l'on exige de l'eſpece qu'elle comprend, on trouve qu'une eſpece compoſée qui eſt la contribution de l'homme, du cheval, du fuſil & de l'epée eſt telle que chaque partie de la differente contribution qui eſt exigée de chacun comprend une partie de cette eſpece ou de cette contribution commune, que la contribution de chacun n'a pas deux coordonnées qui comprennent la même partie de la contribution commune & que la contribution commune n'a pas deux coordonnées qui ne ſoient compriſes par des coordonnées de la contribution de chacun. Il paroit de là que la contribution de chacun comprend la contribution commune, que celle ci ne compoſe pas la premiere & n'eſt compriſe par aucune partie de la premiere. La contribution exigée de chacun eſt donc une quantité dont la meſure eſt la contribution commune.

THEO-

THEOREME XXXII.

Si deux coordonnées epuisent la quantité, la mesure est epuisée par deux coordonnées dont l'une mesure la premiere de ces coordonnées de la quantité & l'autre mesure la seconde. Soit *A* une quantité dont *O* soit la mesure. Si *A* est epuisée par les coordonnées *B C*, *O* est epuisée par deux coordonnées dont l'une mesure *B* & l'autre mesure *C*.

A etant une quantité dont *O* est la mesure, *A* comprend *O*, *O* ne compose point *A* & aucune partie de *A* ne comprend *O*. *A* etant epuisée par les coordonnées *B C*, *O* est donc epuisée par deux coordonnées *P Q* telles que *B* comprend *P* & que *C* comprend *Q* *par Theor. 19. Cor. 2.*

O ne composant point *A*, *P* ne compose point *A* *par Theor. 5.* *P* ne compose donc pas *B* qui est partie de *A*. Par la même raison *Q* ne compose pas *C*.

Soit *D* une partie de *C*. Un Tout epuisé par *BD* est partie de *A* *par Theor. 24.* *O* n'est donc pas ce Tout epuisé par *B D* & n'est pas comprise par ce Tout. Donc *O* n'est pas epuisée par deux coordonnées dont l'une soit comprise par *B* & l'autre par *D*. Mais *O* est epuisée par les coordonnées *P Q* telles que *B* comprend *P*. *Q* n'est donc pas comprise par *D*, par une partie de *C*. Par la même raison *P* n'est comprise par aucune partie de *B*.

 B com-

B comprenant donc *P* qui ne compoſe pas *B* & qui n'eſt compriſe par aucune partie de *B*, *P* meſure *B*. Par la même raiſon *Q* meſure *C*.

THEOREME XXXIII.

Si deux coordonnées epuiſent la meſure, la quantité eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt meſurée par la premiere de ces coordonnées de la meſure & l'autre par la ſeconde. Soit *A* une quantité dont *O* ſoit la meſure. Si *O* eſt epuiſée par les coordonnées *P Q*, *A* eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt meſurée par *P* & l'autre par *Q*.

A etant une quantité dont *O* eſt la meſure, *A* comprend *O* qui ne compoſe point *A* & aucune partie de *A* ne comprend *O*. *O* etant epuiſée par les coordonnées *P Q*, *A* eſt donc epuiſée par les coordonnées *B C* telles que *B* comprend *P* & que *C* comprend *Q* par *Theor. 30. Cor. 2.*

On prouvera donc de la même maniere que dans le Theoreme precedent que *P* ne compoſe point *B* & que *Q* ne compoſe point *C*, que *P* n'eſt compriſe par aucune partie de *B* & *Q* par aucune partie de *C*, d'où il ſuit que *P* meſure *B* & que *Q* meſure *C*.

THEOREME XXXIV.

Une partie de la quantité etant meſurée par une partie de la meſure, toute partie de la meſure qui n'eſt pas la même que celle là & qui eſt compriſe par cette partie de la quantité eſt partie de celle

celle là. Soit *A* une quantité meſurée par *O*. Soit *B* une partie de *A*. Soient *P Q* deux parties de *O* qui ne ſoient pas la même. Si *P* meſure *B* & que *B* comprenne *Q*, *Q* eſt partie de *P*.

A etant une quantité dont *O* eſt la meſure & *B* partie de *A* etant meſurée par *P* partie de *O*, ſoit *N* une eſpece que *B* comprenne ſans en etre compoſée & qui comprenne *P*. *P* meſurant *B*, *P* & *N* par conſequent n'eſt compriſe par aucune partie de *B*. *N* meſure donc *B*, d'où il ſuit *par Theor.33.* que *P* n'eſt point partie de *N*. *N* n'eſt donc pas partie de *O par Theor. 14.* & par conſequent *Q* qui eſt partie de *O* n'eſt pas *N*. *Q* n'eſt donc pas une eſpece que *B* comprenne ſans en etre compoſée & qui comprenne *P*. Mais *B* comprend *Q* qui ne compoſe point *B* parcequ'aucune partie de *O* ne compoſe *A* ni *B* par conſequent. *Q* ne comprend donc pas *P*.

Soit *M* une eſpece que *B* comprenne ſans en etre compoſée & qui n'etant pas *P* ne comprenne pas *P* & ne ſoit pas compriſe par *P*. *M P* epuiſent un Tout *L par Th. 1.* *B* eſt *L* ou comprend *L*. Or *B* n'eſt pas *L* parceque *P* ne compoſe point *B*. *B* comprend donc *L*. *L* ne compoſe point *B par Theor. 7.* *L* meſure donc *B*. *P* n'eſt donc pas partie de *L par Theor. 33.* & par conſequent *L* n'eſt pas partie de *O par Theor. 14.* *L* n'eſt donc pas epuiſé par *Q P par Theor. 15.* & par conſequent *Q* n'eſt pas *M*. *Q* n'eſt donc pas une eſpece que *B* comprenne ſans en etre

 com-

composée & qui n'etant pas *P* ne comprenne pas *P* & ne soit pas comprise par *P*. Mais *B* comprend *Q* qui ne compose pas *B* & qui n'est pas *P* & ne comprend pas *P*. Donc *P* comprend *Q* & par conséquent *Q* est partie de *P* *par Theor. 14.*

COROLLAIRE.

Donc les parties de la mesure qui mesurent la même partie de la quantité sont la même.

THEOREME XXXV.

Les parties de la mesure qui sont comprises par des coordonnées de la quantité sont coordonnées. Soit *A* une quantité mesurée par *O*. Soient *B D* deux parties de *A*. Soient *S T* deux parties de *O* telles que *B* comprenne *S* & que *D* comprenne *T*. Si *B D* sont coordonnées, *S T* le sont aussi.

B D etant des parties de la quantité *A* mesurée par *O* & *S T* etant des parties de *O*, *A* est epuisée par les coordonnées *B C* *par Theor. 17.* *O* est donc epuisée par les coordonnées *P Q* telles que *P* mesure *B* & que *Q* mesure *C* *par Theor.32.* *S* que *B* comprend est *P* ou partie de *P* *par Theor. 34.*

B D etant coordonnées, *D* est *C* ou partie de *C* *par Theor. 21.* & par conséquent *D* comprenant *T*, *C* comprend *T*. *T* est donc *Q* ou partie de *Q* *par Theor.34.* & par conséquent *P Q* etant coordonnées, *S T* le sont aussi *par Theor. 18.*

THEO-

THEOREME XXXVI.

Une partie de la quantité comprenant une partie de la mesure, toute partie de la quantité qui n'est pas la même que celle là & qui est mesurée par cette partie de la mesure est partie de celle là. Soit *A* une quantité mesurée par *O*. Soient *B E* deux parties de *A* qui ne soient pas la même. Soit *S* une partie de *O*. Si *S* mesure *E* & que *B* comprenne *S*, *E* est partie de *B*.

B E etant des parties de la quantité *A* mesurée par *O* & *E* etant mesurée par *S* partie de *O*, aucune partie de *E* ne comprend *S*. *B* qui comprend *S* n'est donc pas partie de *E*. Donc *par Theor. 14.* *E* ne comprend pas *B*.

Soit *D* une partie de *A* qui n'etant pas *E* ne comprenne pas *E* & ne soit pas comprise par *E*. *DE* epuisent un Tout *C par Theor. 1.* *DE* sont des parties de *C par Theor. 15. Cor.*

Si *D E* sont coordonnées, il s'ensuit *par Theor. 35.* que toute partie de *O* que *D* comprend est coordonnée à *S*. *D* ne comprend donc pas *S*.

Si *D E* ne sont pas coordonnées, *E* comprend *F* qui est partie de *C* & telle que les coordonnées *D F* epuisent *C par Theor. 16.* Or *F* est partie de *E par Theor. 14.* *T* partie de *S* mesure donc *F par Theor. 32.* d'où il suit encore que *D* ne comprenant *par Theor. 35.* aucune partie de *O* qui ne soit coordonnée à *T* ne comprend pas *S*.

B qui comprend *S* n'eſt donc pas *D*. *B* n'eſt donc pas une partie de *A* qui n'etant pas *E* ne comprenne pas *E* & ne ſoit pas compriſe par *E*. Mais *B* n' eſt pas *E* & *E* ne comprend pas *B*. *B* comprend donc *E* & par conſequent *E* eſt partie de *B* *par Theor. 14.*

COROLLAIRE.

Donc les parties de la quantité qui ſont meſurées par la même partie de la meſure ſont la même.

THEOREME XXXVII.

Les parties de la quantité qui ſont meſurées par des coordonnées de la meſure ſont coordonnées. Soit *A* une quantité meſurée par *O*. Soient *B D* deux parties de *A*. Soient *S T* deux parties de *O* telles que *S* meſure *B* & que *T* meſure *D*. Si *S T* ſont coordonnées, *B D* le ſont auſſi.

B D etant des parties de la quantité *A* meſurée par *O* & *S T* etant des parties de *O*, *A* eſt epuiſée par les coordonnées *B C* *par Theor. 17.* & *O* eſt epuiſée par les coordonnées *P Q* telles que *P* meſure *B* & que *Q* meſure *C* *par Theor. 32.* *S* meſurant *B*, *S* eſt *P* *par Theor. 34. Cor.*

S T etant coordonnées, *T* eſt donc *Q* ou partie de *Q* *par Theor. 21.* *C* comprend donc *T*, d'où il ſuit *par Theor. 36.* que *D* qui eſt meſurée par *T* eſt *C* ou partie de *C*. *B D* ſont donc coordonnées *par Theor. 18.*

THEO-

THEOREME XXXVIII.

Les parties de la mesure qui mesurent des coordonnées qui epuisent la quantité epuisent la mesure. Soient *D E F G* des coordonnées qui epuisent la quantité *A* mesurée par *O*. Soient *RSTV* des parties de *O* telles que *R* mesure *D*, que *S* mesure *E*, que *T* mesure *F* & que *V* mesure *G*. *R S T V* epuisent *O*.

D E F G etant des coordonnées qui epuisent la quantité *A* mesurée par *O* & *R S T V* etant des parties de *O*, *A* est epuisée par les coordonnées *B G par Theor. 17.* & *B* est epuisée par *D E F par Theor. 25.* *O* est donc epuisée par deux coordonnées *P X* telles que *P* mesure *B* & que *X* mesure *G par Theor. 32.* *V* mesurant *G*, *X* est *V par Theor. 34. Cor.* *O* est donc epuisée par *P V*.

B etant epuisée par *D E F*, *B* est epuisée par les coordonnées *C F par Theor. 17.* & *C* est epuisée par *D E par Theor. 25.* *T* mesurant *F*, *P* est donc epuisée par les coordonnées *Q T* telles que *Q* mesure *C par Theor. 32 & 34. Cor.* Or puisque *P V* epuisent *O*, *Q T V* epuisent *O par Theor. 27.*

C etant epuisée par *D E* & *D* etant mesurée par *R* & *E* par *S*, il s'ensuit que *Q* qui mesure *C* & qui est par consequent epuisée par deux coordonnées dont l'une mesure *D* & l'autre mesure *E* est epuisée par *R S*. *O* etant epuisée par *Q T V*, *O* est donc epuisée par *R S T V par Theor. 27.*

THEO-

THEOREME XXXIX.

Les parties de la quantité qui ſont meſurées par des coordonnées qui epuiſent la meſure epuiſent la quantité. Soient *R S T V* des coordonnées qui epuiſent *O* meſure de la quantité *A*. Soient *DEFG* des parties de *A* telles que *R* meſure *D*, que *S* meſure *E*, que *T* meſure *F* & que *V* meſure *G*. *DEFG* epuiſent *A*.

R S T V etant des coordonnées qui epuiſent *O* meſure de la quantité *A* & *DEFG* etant des parties de *A*, *O* eſt epuiſée par les coordonnées *P V par Theor. 17.* & *P* eſt epuiſée par *R S T par Theor. 25.* *A* eſt donc epuiſée par deux coordonnées *B H* telles que *P* meſure *B* & que *V* meſure *H par Theor. 33.* *V* meſurant *G*, *H* eſt *G par Theor. 36. Cor.* *A* eſt donc epuiſée par *BG*.

P etant epuiſée par *R S T*, *P* eſt epuiſée par les coordonnées *Q T* & *Q* eſt epuiſée par *RS par Theor. 17 & 25.* *T* meſurant *F*, *B* eſt donc epuiſée par les coordonnées *C F* telles que *Q* meſure *C par Theor. 33 & 36. Cor.* Or puiſque *B G* epuiſent *A*, *CFG* epuiſent *A par Theor. 27.*

Q etant epuiſée par *R S* & *D* etant meſurée par *R* & *E* par *S*, il s'enſuit que *C* qui eſt meſurée par *Q* & qui eſt par conſequent epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt meſurée par *R* & l'autre par *S* eſt epuiſée par *DE*. *A* etant epuiſée par *CFG*, *A* eſt donc epuiſée par *DEFG par Theor. 27.*

THEO-

THEOREME XI.

L'espece que la quantité comprend & qui epuise un Tout avec la mesure comprend une partie de la mesure. Soit *A* une quantité mesurée par *O*. Soit *V* une espece que *A* comprenne. Si *O V* epuisent un Tout *I*, *V* comprend une partie de *O*.

Puisque la quantité *A* qui est mesurée par *O* comprend l'espece *V*, supposons que *V* compose *A*. Si *V* est partie de *A*, *V* comprend une partie de *O* *par Theor. 32.* Et si *V* n'est pas partie de *A*, *V* comprend *X* qui est partie de *A* *par Theor. 12.* & *X* comprenant une partie de *O*, *V* comprend une partie de *O*.

Supposons que *V* ne compose point *A*. Puisque *O V* epuisent un Tout *I* & que *O* ni *V* ne compose *A*, *A* n'est pas *I*, d'où il suit que *A* qui comprend *O V* comprend *I* & que *I* ne compose point *A* *par Theor. 7.* *I* n'est comprise aussi par aucune partie de *A* parcequ'aucune partie de *A* ne comprend *O*. *I* mesure donc *A*.

O n'est donc pas partie de *I* *par Theor. 33.* & par consequent *V* comprend une partie de *O* *par Theor. 20.*

COROLLAIRE.

Puisqu'en supposant que *V* ne compose point *A*, *I* mesure *A*, il paroit par cette demonstration que le Tout epuisé par la mesure & une espece que la quantité comprend sans en etre composée mesure la quantité.

THEOREME XLI.

La quantité qui a deux differentes mesures dont aucune ne comprend l'autre en a une troisieme que celles là comprennent. Soit *A* une quantité mesurée par *I* & par *O*. Si *I* n'est pas *O* & que *I* ne comprenne pas *O* & ne soit pas comprise par *O*, une espece comprise par *I* & par *O* mesure *A*.

A etant une quantité mesurée par *I* & par *O*, puisque *I* n'est pas *O* & que *I* ne comprend pas *O* & n'est pas comprise par *O*, *I O* *par Theor. 1.* epuisent un Tout *E* qui mesure *A* *par Theor. 40. Cor.* *I O* ne sont donc pas des parties de *E* *par Theor. 33.* *E* est donc epuisée par deux coordonnées *K Q* telles que *I* comprend *K* & que *O* comprend *Q* *par Theor. 12 & 16.*

K est partie de *I* *par Theor. 14.* & *I* *par Theor. 17.* est epuisée par les coordonnées *K Y*. *E* n'etant point *I*, *Q* n'est point *Y* *par Theor. 2.* d'où il suit *par Theor. 19.* que *Q* comprend *Y*. *E* mesurant *A*, *A* est epuisée par les coordonnées *BC* telles que *K* mesure *B* & que *Q* mesure *C* *par Theor. 33.* *I* est donc epuisée par deux coordonnées dont l'une mesure *B* & l'autre mesure *C* *par Theor. 32.* & comme l'une de ces coordonnées de *I* est *K* *par Theor. 34. Cor.* il s'ensuit *par Theor. 23.* que *Y* mesure *C*. *B* ne comprend pas *Y* *par Theor. 34.*

On prouvera de même que *Q* est partie de *O*, que *O* est epuisée par les coordonnées *X Q*, que *K* com-

K comprend *X*, que *Q* meſurant *C*, *X* meſure *B* & que *C* ne comprend point *X*.

Or puisque *B* qui comprend *X* ne comprend point *Y*, *X* n'eſt pas *Y* & *X* ne comprend pas *Y* & puisque *C* qui comprend *Y* ne comprend point *X*, *Y* ne comprend pas *X*. *XY* epuiſent donc un Tout *V par Theor. 1.* *I* ni *O* ne compoſant *A*, ni *X* ni *Y* ne compoſe *A par Theor. 5.* d'où il ſuit que *A* n'eſt pas *V* & que *A* comprend *V* ſans que *V* compoſe *A par Theor. 7.* Comme *X* meſure *B*, que *Y* meſure *C* & que *BC* ſont des coordonnées qui epuiſent *A*, il paroit auſſi *par Theor. 36.* qu' aucune partie de *A* ne comprend *X* & *Y*, d'où il ſuit qu'aucune partie de *A* ne comprend *V*. *V* meſure donc *A*.

V etant epuiſée par *XY* & *I* etant epuiſée par les coordonnées *KY* telles que *K* comprend *X*, il paroit *par Theor. 19.* que *V* ne comprend point *K*. *I* n'eſt donc pas *V* & par conſequent *I* qui comprend *XY* comprend *V*. *O* etant epuiſé par les coordonnées *XQ* telles que *Q* comprend *Y*, *V* ne comprend pas *Q*. *O* n'eſt donc pas *V* & par conſequent *O* qui comprend *XY* comprend *V*.

THEOREME XLII.

Si une quantité a deux differentes meſures, celle qui ne comprend ni l'autre ni aucune partie de l'autre meſure l'autre. Soit *A* une quantité meſurée par *O* & par *V*. Si *O* n'eſt pas *V* & que *V* ne comprenne ni *O* ni aucune partie de *O*, *V* meſure *O*.

A etant

A etant une quantité mesurée par *O* & par *V* & *V* ne comprenant aucune partie de *O*, *O V* n'epuisent pas un Tout *par Theor. 40.* Mais *O* n'est point *V* & *V* ne comprend point *O*. *O* comprend donc *V par Theor. 1.*

V mesurant *A* n'est pas partie de *O par Theor. 33.* & puisque *V* ne comprend aucune partie de *O*, *V* ne compose pas *O par Theor. 12.*

Soit *P* une partie de *O*. *O* est epuisée par les coordonnées *P Q par Theor. 17.* *A* est donc epuisée par les coordonnées *B C* telles que *P* mesure *B* & que *Q* mesure *C par Theor. 33.* & *par Theor. 32.* *V* est epuisée par les coordonnées *X Y* telles que *X* mesure *B* & que *Y* mesure *C*. *B* ne comprend point *Y par Theor. 34.* d'où il suit que *P* ne comprend point *Y*. *V* n'est donc pas comprise par *P* par une partie de *O*. Donc *V* mesure *O*.

THEOREME XLIII.

La mesure de la mesure mesure la quantite. Soit *A* une quantité mesurée par *O*. Si *O* est une quantité mesurée par *V*, *V* mesure *A*.

A etant une quantité mesurée par *O* & *O* etant une quantité mesurée par *V*, *A* comprend *V* & *O* ne composant point *A*, *V* ne compose point *A par Theor. 5.*

Soit *B* une partie de *A*. *A* est epuisée par les coordonnées *B C par Theor. 17.* *O* est donc epuisée par les coordonnées *P Q* telles que *P* mesure *B* & que *Q* mesure *C par Theor. 32.* &

V est

V eſt epuiſée par les coordonnées *XY* telles que *X* meſure *P* & que *Y* meſure *Q*. *P* ne comprend pas *Y* *par Theor.34.* & *Y* ne comprenant pas *X*, *Y* n'eſt pas *P* & ne comprend pas *P*. *PY* etant compriſes par *A* epuiſent donc un Tout *par Theor. 1.* Mais *XY* etant coordonnées, *Y* ne comprend aucune partie de *X* *par Theor. 13 & 14.* d'où il ſuit *par Theor.32.* que *Y* ne comprend aucune partie de *P*. Donc *par Theor. 40.* *B* ne comprend pas *Y*. *V* n'eſt donc pas compriſe par *B* par une partie de *A* & par conſequent *V* meſure *A*.

THEOREME XLIV.

Si une quantité a deux meſures dont l'une comprenne l'autre, toute quantité meſurée par la premiere eſt meſurée par la ſeconde. Soit *A* une quantité meſurée par *O* & par *V*. Soit *E* une quantité meſurée par *O*. Si *O* comprend *V*, *V* meſure *E*.

A etant une quantité meſurée par *O* & par *V* & *E* etant une quantité meſurée par *O* qui comprend *V*, *E* comprend *V*. *O* ne compoſant point *E*, *V* ne compoſe point *E* *par Theor.5.*

Soit *F* une partie de *E*. *E* eſt epuiſée par les coordonnées *FG* *par Theor. 17.* *O* eſt donc epuiſée par les coordonnées *P Q* telles que *P* meſure *F* & que *Q* meſure *G* *par Theor. 32.* *A* eſt donc auſſi epuiſée par les coordonnées *BC* telles que *P* meſure *B* & que *Q* meſure *C* *par Theor.33.* & *V* eſt epuiſée par les coordonnées

XY telles que *X* mesure *B* & que *Y* mesure *C* *par Theor. 32.* d'où il suit *par Theor. 34.* que *B* & par conséquent *P* ne comprend ni *Y* ni aucune partie de *Y*. Puisque *O* qui comprend *V* comprend *Y* & que *O* est epuisée par *PQ*, *Q* est donc *Y* ou comprend *Y* *par Theor. 19.* *Y* n'est donc pas *P* & ne comprend pas *P*. *PY* etant comprises par *A* epuisent donc un Tout *par Theor. 1.* Mais *PQ* etant coordonnées, il s'ensuit *par Theor. 13 & 14.* que *Q* & par conséquent *Y* ne comprend aucune partie de *P*. Donc *par Theor. 40.* *F* ne comprend point *Y*. *V* n'est donc pas comprise par *F* par une partie de *E* & par conséquent *V* mesure *E*.

THEOREME XLV.

Si une quantité & une espece qui ne la compose pas sont epuisées chacune par deux coordonnées telles que l'une des coordonnées de cette espece etant comprise par l'une de ces coordonnées de la quantité soit ou comprenne la mesure de cette coordonnée de la quantité & que l'autre coordonnée de cette espece etant comprise par l'autre coordonnée de la quantité soit ou comprenne la mesure de cette autre coordonnée de la quantité, cette espece mesure la quantité. Soit *A* une quantité epuisée par les coordonnées *D F*. Soit *O* une espece qui ne compose point *A* & qui soit epuisée par les coordonnées *R T* telles que *D* comprenne *R* & que *F* comprenne *T*. Si *R* est ou comprend *Y* mesure de *D* & que *T* soit ou comprenne *Z* mesure de *F*, *O* mesure *A*.

Puisque

Puisque la quantité *A* eſt epuiſée par les coordonnées *D F* & que l'eſpece *O* eſt epuiſée par les coordonnées *R T* telles que *D* comprend *R* & que *F* comprend *T*, *A* eſt ou comprend *O*. Mais *D* qui comprend *R* n'eſt pas *R* & n'eſt pas partie de *R*, & *DF* etant coordonnées, *D* n'eſt ni *T* ni partie de *T* & n'a aucune partie qui ſoit partie de *T*. Donc *par Theor. 19. Cor. 1.* *D* n'eſt pas partie de *O*. *A* n'eſt donc pas *O* & par conſequent *A* comprend *O*. Puiſque *O* ne compoſe point *A*, *R* ne compoſe donc point *A par Theor. 5.* & par conſequent *R* ne compoſe point *D* qui eſt partie de *A*. De plus *R* etant ou comprenant *Y* meſure de *D*, aucune partie de *D* ne comprend *R* d'ou il ſuit que *R* meſure *D*. De même puiſque *T* qui ne compoſe ni *A* ni *F* eſt ou comprend *Z* meſure de *F*, *T* meſure *F*.

R T etant coordonnées, *T* ne comprend aucune partie de *R par Theor. 13 & 14.* d'où il ſuit *par Theor. 40.* que *D* ne comprend point *T*. Donc *D* ni aucune partie de *D* ne comprend *O*.

Soit *G* une partie de *F*. *DG* qui *par Theor. 18.* ſont coordonnées epuiſent un Tout *B par Theor. 28.* & *B* eſt partie de *A par Theor. 24.* *F* eſt epuiſée par les coordonnées *GH par Theor. 17.* d'où il ſuit *par Theor. 32.* que *T* eſt epuiſée par les coordonnées *VX* telles que *V* meſure *G* & que *X* meſure *H*. Or *par Theor. 34.* *G* ne comprend ni *X* ni aucune partie de *X*. De plus *RX* qui *par Theor. 18.* ſont coordonnées epuiſent

 un

un Tout *par Theor. 28.* & comme *X* ne comprend aucune partie de *R*, *D* ne comprend pas *X* *par Theor. 40.* Enfin *O* & par conſequent *X* ne compoſant point *A*, *X* ne compoſe point *B* partie de *A*. Donc *par Theor. 19. Cor. 2.* *B* ne comprend point *X* & par conſequent *B* ne comprend point *O*.

Soit *E* une partie de *D*. *EG* epuiſent un Tout *C* qui eſt partie de *B* *par Theor. 24.* *C* ne comprend donc pas *O*. Il paroit donc *par Theor. 19. Cor. 1.* qu'aucune partie de *A* ne comprend *O* & par conſequent *O* meſure *A*.

THEOREME XLVI.

L'eſpece epuiſée par des coordonnées qui meſurent des coordonnées qui epuiſent la quantité meſure la quantité. Soit *A* une quantité epuiſée par les coordonnées *CDE* telles que *Q* meſure *C*, que *R* meſure *D* & que *S* meſure *E*. Si *QRS* ſont des coordonnées qui epuiſent l'eſpece *O*, *O* meſure *A*.

La quantité *A* etant epuiſée par les coordonnées *CDE* & l'eſpece *O* etant epuiſée par les coordonnées *QRS* telles que *Q* meſure *C*, que *R* meſure *D* & que *S* meſure *E*, *CD* epuiſent un Tout *B* *par Theor. 28.* *B* eſt partie de *A* *par Theor. 26.* d'où il ſuit *par Theor. 17 & 32.* que *B* eſt une quantité. *QR* epuiſent auſſi un Tout *P* qui eſt partie de *O*. *Q* ne compoſant point *C* & *R* ne compoſant point *D*, ni *Q* ni *R* ne compoſe *B* *par Theor. 9.* d'où il ſuit *par Theor. 7.* que

que *P* ne compoſe point *B*. Donc *P* meſure *B* *par Theor. 45.*

A eſt epuiſée par les coordonnées *B E par Theor. 3 & 26.* & *O* eſt epuiſée par les coordonnées *P S*. Ce que l'on vient de prouver fait donc voir que *O* meſure *A*.

DEFINITION V.

La *Grandeur* eſt une quantité qui n'a pas deux coordonnées dont l'une ne ſoit meſurée par une eſpece qui meſure l'autre ou une partie de l'autre. Soit *A* une quantité. Si *A* n'eſt pas compoſée, ou ſi toutes les eſpeces *C D* qui ſont des parties coordonnées de *A* ſont telles que *D* eſt meſurée par une eſpece qui meſure *C* ou une partie de *C*, *A* eſt une Grandeur.

THEOREME XLVII.

Si la meſure d'une quantité n'a pas deux coordonnées dont l'une ne ſoit meſurée par une eſpece qui meſure l'autre ou une partie de l'autre, cette quantité eſt une grandeur. Soit *A* une quantité meſurée par *O*. Si *O* n'a pas deux coordonnées dont l'une ne ſoit meſurée par une eſpece qui meſure l'autre ou une partie de l'autre, *A* eſt une Grandeur.

A etant une quantité meſurée par *O*, ſoient *B D* des parties coordonnées de *A*. *B* eſt donc meſurée par *P* partie de *O* *par Theor. 17 & 32.* & *D* eſt meſurée par *R* partie de *O*. *P R* ſont coordonnées *par Theor. 35.* Donc par la ſuppoſition *R* eſt meſurée par une eſpece *Z* qui meſure *P* ou *Q* partie de *P*.

Z mesure donc D *par Theor. 43.* & si Z mesure P, Z mesure B. Si Z mesure Q, Q mesurant C partie de B *par Theor. 17 & 33.* il s'ensuit *par Theor. 43.* que Z mesure C. A n'a donc pas deux coordonnées B D qui ne soient telles que D est mesurée par une espece Z qui mesure B ou C partie de B. Ainsi A est une Grandeur.

EXEMPLE. Si un Souverain exige que plusieurs de ses Sujets contribuent chacun une certaine somme, la contribution commune est la mesure de la contribution exigée de chacun. Or deux parties coordonnées quelconques de la contribution commune & par consequent aussi de la contribution exigée de chacun sont telles que l'une de ces parties est mesurée par une somme qui mesure l'autre partie ou une partie de cette partie. La contribution exigée de chacun est donc une Grandeur.

COROLLAIRE.

La quantité mesurée par une grandeur est donc une grandeur.

THEOREME XLVIII.

La mesure de la grandeur n'a pas deux coordonnées dont l'une ne soit mesurée par une espece qui mesure l'autre ou une partie de l'autre. Soit A une grandeur mesurée par O. O n'a pas deux coordonnées dont l'une ne soit mesurée par une espece qui mesure l'autre ou une partie de l'autre.

A etant

A etant une grandeur mesurée par *O*, soient *PR* des parties coordonnées de *O*. *P* mesure *B* partie de *A par Theor. 17 & 33.* & *R* mesure *D* partie de *A*. *B D* sont coordonnées *par Theor. 37.* *D* est donc mesurée par une espece *Z* qui mesure *B* ou *C* partie de *B*.

Supposons que *Z* mesure *B*. *B* qui est mesurée par *P* ne comprend ni *R* ni aucune partie de *R par Theor. 34.* *Z* n'est donc pas *R* & ne comprend ni *R* ni aucune partie de *R*. Donc *Z* mesure *R par Theor. 42.* On prouvera de même que *Z* mesure *P*.

Supposons que *Z* mesure *C*. *C* est mesurée par *Q* partie de *P par Theor. 17 & 32.* *CD* sont coordonnées *par Theor. 18.* On prouvera donc que *Z* mesure *Q*. *O* n'a donc pas deux coordonnées *P R* qui ne soient telles que *R* est mesurée par une espece *Z* qui mesure *P* ou *Q* partie de *P*.

COROLLAIRE.

Si *Z* mesure *B* & *D*, *Z* mesure *P* & *R*. L' espece qui mesure deux coordonnées d' une grandeur mesure les parties de la mesure de cette grandeur par lesquelles ces coordonnées sont mesurées.

THEOREME XLIX.

La partie de la grandeur est une grandeur. Soit *A* une grandeur. Si *B* est partie de *A*, *B* est une grandeur.

A etant une grandeur & *B* etant partie de *A*, *B* est une quantité *par Theor. 17 & 32.*

Soient *C D* deux parties coordonnées de *B*. *C D* ſont parties de *A par Theor. 13.* *D* eſt donc meſurée par une eſpece *Z* qui meſure *C* ou une partie de *C*. *B* n'a donc pas deux coordonnées dont l'une ne ſoit meſurée par une eſpece qui meſure l'autre ou une partie de l'autre. Ainſi *B* eſt une grandeur.

DEFINITION VI.

Deux grandeurs ſont *egales* ſi elles ont la même meſure. De deux grandeurs dont l'une eſt egale à une partie de l'autre la premiere eſt *moindre* que la ſeconde, la ſeconde eſt *plus grande* que la premiere & ces deux grandeurs ſont *inegales*. Soient *A B E F* des grandeurs. Si *O* meſure *A* & *E*, *A E* ſont egales. Si *B* eſt partie de *A* & que *F* ſoit egale à *B*, *F* eſt moindre que *A*, *A* eſt plus grande que *F* & *A F* ſont inegales.

THEOREME L.

Les parties coordonnées de la grandeur ſont egales ou inegales. Soit *A* une grandeur. Si *B D* ſont des parties coordonnées de *A*, *B D* ſont egales ou inegales.

A etant une grandeur & *B D* etant des parties coordonnées de *A*, *D* eſt meſurée par une eſpece *Z* qui meſure *B* ou *C* partie de *B*. Or *B C D* ſont des grandeurs *par Theor. 49.* Si donc *Z* meſure *B*, *B D* ſont egales & ſi *Z* meſure *C*, *C D* ſont egales & ainſi *D* eſt moindre que *B* & *B D* ſont inegales.

EXEM-

EXEMPLE. Une ligne eſt meſurée par une certaine longueur & n'a pas deux parties coordonnées dont l'une ne ſoit meſurée par une longueur qui meſure l'autre ou une partie de l'autre. Cela fait qu'une ligne eſt une grandeur, que toute partie d'une ligne eſt une grandeur & que les parties coordonnées d'une ligne ſont egales ou inegales.

THEOREME LI.

Les grandeurs egales à une troiſieme ſont égales entre elles. Soint *A B C* trois grandeurs. Si *A* eſt egale à *B* & que *B* ſoit egale à *C*, *A* eſt egale à *C*.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A* eſt egale à *B*, une eſpece *O* qui meſure *A* meſure *B* & *B* etant egale à *C*, une eſpece *P* qui meſure *B* meſure *C*. Si *O* eſt *P*, *P* meſurant *A* & *C*, *A* eſt egale à *C*.

Si *O* n'eſt pas *P*, ſuppoſons que *O* comprenne *P*. *B* etant meſurée par *O* & par *P* & *O* meſurant *A*, *P* meſure *A par Theor. 44.* & par conſequent *A* eſt egale à *C*.

Suppoſons que *O* ne comprenne pas *P* & que *P* ne comprenne pas *O*. Une eſpece *Q* qui meſure *B* eſt compriſe par *O* & par *P par Theor. 41.* *Q* meſure donc *A* meſurée par *O* & *C* meſurée par *P par Theor. 44.* Donc *A* eſt egale à *C*.

COROLLAIRE.

P ou *Q* mesure *A*, *B* & *C*. Si plusieurs grandeurs sont egales, une certaine espece les mesures toutes.

THEOREME LII.

La grandeur egale à une autre est plus grande que toute grandeur moindre que l'autre. Soient *A E G* des grandeurs. Si *A* est egale à *E* & que *E* soit plus grande que *G*, *A* est plus grande que *G*.

La grandeur *E* etant plus grande que la grandeur *G*, *G* est egale à *F* partie de *E*. Or *E* etant egale à la grandeur *A*, une espece *O* qui mesure *A* mesure *E*. *P* partie de *O* mesure *F* *par Theor. 32.* & *P* mesure *B* partie de *A* *par Theor. 33.* *B* etant donc egale à *F* & *F* etant egale à *G*, *G* est egale à *B* *par Theor. 51.* Ainsi *A* est plus grande que *G*.

THEOREME LIII.

La grandeur plus grande qu'une autre est plus grande que toute grandeur qui est egale à l'autre ou qui est moindre que l'autre. Soient *A E I L* des grandeurs telles que *A* soit plus grande que *E*. Si *E* est egale à *I*, *A* est plus grande que *I* & si *E* est plus grande que *L*, *A* est plus grande que *L*.

Les grandeurs *AEIL* etant telles que *A* est plus grande que *E*, *B* partie de *A* est egale à *E*. *I*, etant egale à *E*, est donc egale à *B* *par Theor. 51.* & ainsi *A* est plus grande que *I*.

E etant

E etant plus grande que *L*, *F* partie de *E* eſt egale à *L*. Or *B*, etant egale à *E*, eſt plus grande que *F par Theor.52.* *F* eſt donc egale à *C* partie de *B* & de *A*. Donc *L* eſt egale à *C par Theor.51.* & ainſi *A* eſt plus grande que *L*.

THEOREME LIV.

Si de deux grandeurs chacune eſt epuiſée par deux coordonnées telles qu'une coordonnée de l'une etant egale à une coordonnée de l'autre, les deux autres coordonnées ſoient auſſi egales, ces deux grandeurs ſont egales. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *B C*. Soit *E* une grandeur epuiſée par les coordonnées *F G*. Si *B* eſt egale à *F* & que *C* ſoit egale à *G*, *A* eſt egale à *E*.

Les grandeurs *A E* etant telles que *A* eſt epuiſée par les coordonnées *BC*, que *E* eſt epuiſée par les coordonnées *FG* & que *B* eſt egale à *F*, une eſpece *I* meſure *B* & *F*, & *C* etant egale à *G*, une eſpece *K* meſure *C* & *G*. *A* eſt meſurée par une eſpece *L* epuiſée par les coordonnées *M N* telles que *M* meſure *B* & que *N* meſure *C par Theor. 32.* & *E* eſt meſurée par une eſpece *O* epuiſée par les coordonnées *P Q* telles que *P* meſure *F* & que *Q* meſure *G*.

Puisque *F* eſt meſurée par *I* & par *P*, ſi *P* n'etant pas *I* ne comprend pas *I* & n'eſt pas compriſe par *I*, *I P* comprennent une eſpece *V* qui meſure *F par Theor. 41.* & parceque *I* meſure

ſure *B*, *V* meſure *B par Theor. 44.* Par la même raiſon ſi *I* comprend *P*, *P* meſure *B* & ſi *P* eſt ou comprend *I*, comme *I* meſure *B*, il s'enſuit que dans tous ces differens cas *P* eſt ou comprend une eſpece *X* qui eſt *I* ou eſt compriſe par *I* & qui meſure *B* & *F.*

On prouvera de même que *M* eſt ou comprend une eſpece *Y* qui etant *X* ou etant compriſe par *X* eſt *P* ou eſt compriſe par *P* & qui meſure *B* & *F.* On prouvera donc auſſi que *N* eſt ou comprend une eſpece *Z* qui eſt *Q* ou eſt compriſe par *Q* & qui meſure *C* & *G*.

Or puiſque *L* meſure de *A* eſt epuiſée par les coordonnées *MN* telles que *M* eſt ou comprend *Y* & que *N* eſt ou comprend *Z* & puiſque *O* meſure de *E* eſt epuiſée par les coordonnées *P Q* telles que *P* eſt ou comprend *Y* & que *Q* eſt ou comprend *Z*, ſuppoſé que l'on entende par *R* une eſpece epuiſée par deux coordonnées *ST* telles que *S* ſoit ou comprenne *Y* & que *T* ſoit ou comprenne *Z*. Comme *O* renferme l'attribut commun de *R*, *O* eſt *R* ou comprend *R* & par la même raiſon *P* qui meſure *F* eſt *S* ou comprend *S* & *Q* qui meſure *G* eſt *T* ou comprend *T*. *O* ne compoſant point *E*, *R* ne compoſe point *E par Theor. 5.* Donc *R* meſure *E par Theor. 45.* On prouvera de même que *R* meſure *A*. *R* meſurant donc *A* & *E*, *A* eſt egale à *E*.

THEO-

THEOREME LV.

Si deux grandeurs egales ſont epuiſées chacune par deux coordonnées & qu'une coordonnée de l'une ſoit egale à une coordonnée de l'autre, les deux autres coordonnées ſont egales. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *B C.* Soit *E* une grandeur epuiſée par les coordonnées *FG.* Si *A* eſt egale à *E* & que *B* ſoit egale à *F*, *C* eſt egale à *G*.

Les grandeurs *A E* etant egales & telles que *A* eſt epuiſée par les coordonnées *BC* & que *E* eſt epuiſée par les coordonnées *FG*, une eſpece *O* qui meſure *A* meſure *E*, *O* eſt epuiſée par les coordonnées *P Q* telles que *P* meſure *B par Theor. 32.* & *O* eſt auſſi epuiſée par les coordonnées *RS* telles que *R* meſure *F*. *B* etant egale à *F*, une eſpece *T* qui meſure *B* meſure *F*.

Puiſque *B* eſt meſurée par *P* & par *T* & que *F* eſt meſurée par *R* & par *T*, on prouvera comme dans le Theoreme precedent que *P* eſt ou comprend une eſpece *Z* qui eſt *R* ou eſt compriſe par *R* & qui meſure *B* & *F*.

Or puiſque *O* meſure de *A* eſt epuiſée par les coordonnées *P Q* & par les coordonnées *RS* telles que *P* & *R* ſont ou comprennent *Z*, ſuppoſé que l'on entende par *V* une eſpece qui meſure *A* & qui ſoit epuiſée par les coordonnées *XY* telles que *X* ſoit ou comprenne *Z*. Comme *O* renferme l'attribut commun de *V*, *O* eſt *V* ou comprend *V*. Par la même raiſon *P* qui me-

mesure *B* est ou comprend *X* & *R* qui mesure *F* est ou comprend *X*. De plus *O* mesurant *A* & *E*, *V* mesure *E par Theor. 44.*

P etant ou comprenant *X*, *X* ne compose point *B par Theor. 5.* & comme *X* est ou comprend *Z* mesure de *B*, aucune partie de *B* ne comprend *X*, d'où il suit que *X* mesure *B*. Or *V* est epuisée par deux coordonnées dont l'une mesure *B* & l'autre mesure *C par Theor. 32.* & celle qui mesure *B* etant *X par Theor. 34. Cor.* *Y* mesure *C par Theor. 23.* On prouvera de même que *X* mesure *F* & que *Y* mesure *G*. *Y* mesurant donc *C* & *G*, *C* est egale à *G par Theor. 49.*

THEOREME LVI.

Si deux grandeurs etant epuisées chacune par deux coordonnées l'une de ces coordonnées de la premiere est egale à l'autre de ces coordonnées de la seconde & que l'autre coordonnée de la premiere soit plus grande que l'autre coordonnée de la seconde, la premiere est plus grande que la seconde. Soit *A* une grandeur epuisée par les coordonnées *C E*. Soit *I* une grandeur epuisée par les coordonnées *KL*. Si *C* est egale à *K* & que *E* soit plus grande que *L*, *A* est plus grande que *I*.

Les grandeurs *A I* etant telles que *A* est epuisée par les coordonnées *CE*, que *I* est epuisée par les coordonnées *K L* & que *E* est plus grande que *L*, *F* partie de *E* est egale à *L*. *E* est

eſt epuiſée par les coordonnées *FG par Theor.* 17. & *A* eſt epuiſée par les coordonnées *C F G par Theor.* 27 & 18. *C F* epuiſent un Tout *B par Theor.* 28. & *B* eſt partie de *A par Theor.* 26. Or *C* etant egale à *K* & *F* etant egale à *L*, *B* eſt egale à *I par Theor.* 49 & 54. *A* eſt donc plus grande que *I*.

COROLLAIRE.

Si *K* etoit egale à *D* partie de *C*, *DF* epuiſeroient un Tout qui etant partie de *B par Theor.* 24. ſeroit partie de *A* & egal à *I* & par conſéquent *A* ſeroit encore plus grande que *I*. Une grandeur eſt plus grande qu'une autre, ſi elles ſont epuiſées chacune par deux coordonnées telles que l'une de ces coordonnées de la premiere etant plus grande que l'une de ces coordonnées de la ſeconde, l'autre coordonnée de la premiere eſt auſſi plus grande que l'autre coordonnée de la ſeconde.

THEOREME LVII.

Si deux grandeurs dont l'une eſt plus grande que l'autre ſont epuiſées chacune par deux coordonnées telles que l'une de ces coordonnées de la premiere ſoit egale à l'une de ces coordonnées de la ſeconde, l'autre coordonnée de la premiere eſt plus grande que l'autre coordonnée de la ſeconde. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *GH*. Soit *I* une grandeur epuiſée par les coordonnées *KL*. Si *A* eſt plus grande que *I* & que *H* ſoit egale à *L*, *G* eſt plus grande que *K*.

Les

Les grandeurs *A I* etant telles que *A* eſt plus grande que *I* qui eſt epuiſée par les coordonnées *KL*, *D* partie de *A* eſt egale à *I*, *A* eſt epuiſée par les coordonnées *CD par Theor.17.* & *D* eſt plus grande que *L par Theor. 52.* *F* partie de *D* eſt donc egale à *L* & *D* eſt epuiſée par les coordonnées *EF* & par conſequent *A* eſt epuiſée par les coordonnées *C E F par Theor. 27 & 18.* *A* eſt donc epuiſée par les coordonnées *B F par Theor. 17.* & *B* eſt epuiſée par *C E par Theor. 25.*

Or *I* etant egale à *D* & *L* etant egale à *F*, *K* eſt egale à *E par Theor. 55.* & *A* etant epuiſée par les coordonnées *G H* telles que *H* eſt egale à *L*, *H* eſt egale à *F par Theor. 51.* *A* etant epuiſée par *G H* & par *B F*, *G* eſt donc egale à *B par Theor. 55.* & par conſequent *G* eſt plus grande que *E par Theor. 52.* Donc *G* eſt plus grande que *K par Theor. 53.*

THEOREME LVIII.

Si de deux grandeurs egales l'une eſt epuiſée par des coordonnées dont chacune ſoit meſurée par quelque partie d'une meſure de l'autre, cette meſure de la ſeconde meſure la premiere. Soient *A* & *I* des grandeurs egales. Soit *V* une meſure de *I*. Si *A* eſt epuiſée par des coordonnées dont chacune ſoit meſurée par quelque partie de *V*, *V* meſure *A*.

Les

Les grandeurs *A I* etant telles que *A* eſt epuiſée par des coordonnées toutes meſurées par quelque partie de *V* qui meſure *I*, ſuppoſons que *C D* ſoient deux coordonnées de *A* & *Y Z* deux parties de *V* telles que *Y* meſure *C* & que *Z* meſure *D*. *A* etant egale à *I*, une eſpece *O* meſure *A* & *I*. *C* eſt meſurée par *Q* partie de *O par Theor.32.* & *D* eſt meſurée par *R* partie de *O*. *Q R* ſont coordonnées *par Theor.35.* *Q* meſure *K* partie de *I par Theor.33.* & *R* meſure *L* partie de *I*. *K L* ſont coordonnées *par Theor.37.*

Si *Y* eſt *Q* & que *Z* n'etant pas *R* ne comprenne ni *R* ni aucune partie de *R*, *Z* meſure *R par Theor. 42.* d'où il ſuit *par Theor. 43.* que *Z* meſure *L*. Donc *par Theor.35.* *YZ* ſont coordonnées.

Si *Y* eſt *Q* & que *Z* comprenne *R* ou une partie de *R*, comme *C par Theor. 35.* & par conſequent *Y* ne comprend ni *R* ni aucune partie de *R*, *Z* n'eſt pas *Y* & *Z* n'eſt pas partie de *Y* & puiſque *L* ne comprend ni *Y* ni aucune partie de *Y*, *Y* n'eſt pas partie de *Z* & aucune partie de *Y* n'eſt partie de *Z*. Ainſi *YZ* ſont coordonnées.

Si *Y* n'etant pas *Q* ne comprend ni *Q* ni aucune partie de *Q* & que *Z* n'etant pas *R* ne comprenne ni *R* ni aucune partie de *R*, *Y* meſure *Q* & *Z* meſure *R par Theor. 42.* *Y* meſure donc *K* & *Z* meſure *L par Theor.43.* d'où il ſuit *par Theor.35.* que *YZ* ſont coordonnées.

Si *Y* n'etant pas *Q* ne comprend ni *Q* ni aucune partie de *Q* & que *Z* comprenne *R* ou une partie de *R*, comme *C par Theor.35.* & par conſequent *Y* ne comprend ni *R* ni aucune partie de *R*, *Z* n'eſt pas *Y* & *Z* n'eſt pas partie de *Y*. *Y* meſure *Q* & *K*, d'où il ſuit que *L* ne comprend pas *Y* & par conſequent *Y* n'eſt pas partie de *Z*. Soit *α* une partie de *Z*. *α* meſure *M* partie de *L par Theor.33.* & *M* eſt meſurée par *S* partie de *R par Theor.32.* Or ſi *α* eſt *S*, ou ſi *α* n'etant pas *S* ne comprend ni *S* ni aucune partie de *S*, ce que l'on a prouvé fait voir que *Y α* ſont coordonnées, d'où il ſuit que *α* n'eſt pas partie de *Y*. Et ſi *α* comprend *S* ou une partie de *S* & de *R*, *α* n'eſt point partie de *Y*. Aucune partie de *Z* n'etant partie de *Y*, *Y Z* ſont donc coordonnées.

Si *Y* comprend *Q* ou une partie de *Q* & que *Z* comprenne *R* ou une partie de *R*, comme *C* & par conſequent *Y* ne comprend ni *R* ni aucune partie de *R* & que *D* & par conſequent *Z* ne comprend ni *Q* ni aucune partie de *Q par Theor.35.* il s'enſuit que *Z* n'eſt pas *Y*, que *Z* n'eſt pas partie de *Y* & que *Y* n'eſt pas partie de *Z*. Soit *β* une partie de *Z*. *β* meſure *N* partie de *L* & *N* eſt meſurée par *T* partie de *R*. Or ſi *β* eſt *T* ou ſi *β* n'etant pas *T* ne comprend ni *T* ni aucune partie de *T*, ce que l'on a prouvé fait voir que *Y β* ſont coordonnées, d'où il ſuit que *β* n'eſt pas partie de *Y*. Et ſi *β* comprend *T* ou une partie de *T* & de *R*, *β* n'eſt pas partie

tie de *Y*. Aucune partie de *Z* n'etant partie de *Y*, *Y Z* ſont donc coordonnées.

YZ epuiſent donc un Tout *X par Theor. 28.* *C D* epuiſent auſſi un Tout *B* & *X* meſure *B par Theor. 46.*

Suppoſé que *C D* epuiſent *A*, *B* eſt *A* & *X* meſure *A*. *A* etant egale à *I* & toute partie de *V* meſurant *par Theor. 33.* une partie de *I*, *X* n'eſt donc pas partie de *V* & par conſequent *X* eſt *V par Theor. 15.* *V* meſure donc *A*.

Suppoſé que *A* ſoit epuiſée par les coordonnées *C D E* & que *E* ſoit auſſi meſurée par une partie de *V*, *A* etant egale à *I* & *B* etant partie de *A par Theor. 26.* *V* ne meſure pas *B*. *X* n'eſt donc pas *V* & par conſequent *X* eſt partie de *V* & *A* etant epuiſée par les coordonnées *B E* dont chacune eſt meſurée par une partie de *V*, ce que l'on vient de prouver fait voir que *V* meſure *A*.

THEOREME LIX.

Toute partie de la grandeur eſt l'une de pluſieurs coordonnées qui epuiſent la grandeur & qui ſont toutes egales à celle là ou toutes à l'exception d'une qui eſt moindre que celle là. Soit *A* une grandeur. Si *C* eſt une partie de *A*, *A* eſt epuiſée par des coordonnées dont l'une eſt *C* & qui ſont toutes egales à *C* ou qui le ſont toutes à l'exception d'une qui eſt moindre que *C*.

 A etant

A etant une grandeur dont *C* eſt une partie, *A* eſt epuiſée par les coordonnées *CD* *par Theor. 17.* & *A* eſt exprimée par *CD*. Or ſi *D* eſt plus grande que *C*, *E* partie de *D* eſt egale à *C* & en exprimant *A* par *CD* on exprime les coordonnées *C E* &c. qui *par Theor. 27.* epuiſent *A*. *D* eſt epuiſée par les coordonnées *EF*. Si *F* eſt plus grande que *E*, *G* partie de *F* eſt egale à *E* & en exprimant *A* par les coordonnées *CE* &c. on exprime les coordonnées *C E G* &c. qui epuiſent *A*. *F* eſt epuiſée par les coordonnées *G H*. Si *H* eſt plus grande que *G*, *I* partie de *H* eſt egale à *G* & en exprimant *A* par les coordonnées *C E G* &c. on exprime les coordonnées *C E G I* &c. qui epuiſent *A*.

On trouvera donc enfin les coordonnées *CEGIL* qui etant toutes egales entre elles ne ſeront pas toutes coordonnées à une partie de *A* qui ſoit egale à *C*. *CEGIL* epuiſent un Tout *B* *par Theor. 28.*

Si *A* n'a point de partie qui ſoit coordonnée à chacune des parties *CEGIL*, *B* n'eſt pas l'une de deux coordonnées qui epuiſent *A par Theor. 18.* *B* n'eſt donc pas partie de *A par Theor. 17.* d'où il ſuit *par Theor. 15.* que *B* eſt *A*. *A* eſt donc epuiſée par *C E G I L* toutes egales entre elles.

Si une partie de *A* eſt coordonnée à chacune des parties *CEGIL*, *B* eſt partie de *A par Theor. 26.* & *A* eſt epuiſée par les coordonnées *BM*, & par conſequent *A* eſt epuiſée par les coordonnées

nées *CEGILM*. *M* n'eſt donc pas egale à *C* ni plus grande que *C*, d'où il ſuit *par Theor. 50.* que *M* eſt moindre que *C*.

THEOREME LX.

Deux grandeurs qui ſont moindres qu' une troiſieme ſont egales ou inegales. Soient *A I O* des grandeurs telles que *I O* ſoient moindres que *A*. *I* eſt egale à *O* ou plus grande que *O* ou moindre que *O*.

Les grandeurs *A I O* etant telles que *I* eſt moindre que *A*, *I* eſt egale à *B* partie de *A*. *A* eſt epuiſée par les coordonnées *BC par Theor. 17.* *O* etant moindre que *A* eſt auſſi egale à *E* partie de *A*.

Si *E* eſt *B*, *I* eſt egale à *O par Theor. 51.* Si *E* eſt partie de *B*, *I* eſt plus grande que *E par Theor. 52.* Donc *I* eſt plus grande que *O par Theor. 53.*

Si *E* eſt *C*, *B E* ſont egales ou inegales *par Theor. 50.* Suppoſé donc que *B* ſoit egale à *E*, *B* eſt egale à *O* & *I* eſt egale à *O par Theor. 51.* & ſuppoſé que *B* ſoit plus grande que *E*, *B* eſt plus grande que *O par Theor. 53.* & *I* eſt plus grande que *O par Theor. 52.* Si *E* eſt partie de *C*, *B* etant coordonnée à toute partie de *C*, il s'enſuit encore que *B E* ſont egales ou inegales, & par conſequent *I O* ſont egales ou inegales.

Si *E* n'etant ni *B* ni *C* n'eſt partie ni de *B* ni de *C*, *E* eſt epuiſée par les coordonnées *FH* telles que *F* eſt *B* ou partie de *B* & que *H* eſt *C* ou partie de *C* *par Theor. 19. Cor. 1.* Supposé que *F* ſoit *B*, *I* qui eſt egale à *B* & à *F* eſt moindre que *O* qui eſt egale à *E*. Supposé que *H* ſoit *C*, *F* eſt partie de *B* *par Theor. 19. Cor. 1.* *B* eſt epuiſée par les coordonnées *FG*, *E* eſt epuiſée par *FC*. *C* & *G* partie de *B* etant coordonnées ſont egales ou inegales, d'où il ſuit que *BE* ſont egales ou inegales *par Theor. 54 & 56.* Donc *I* qui eſt egale à *B* & *O* qui eſt egale à *E* ſont egales ou inegales. Supposé que *F* ſoit partie de *B* & que *H* ſoit partie de *C*, *B* eſt epuiſée par *FG* & *E* eſt epuiſée par *FH* & *GH* etant coordonnées, *BE* ſont egales ou inegales & par conſequent *IO* ſont egales ou inegales.

COROLLAIRE.

Donc toutes les parties de la grandeur ſont egales ou inegales.

DEFINITION VII.

L' *Unité* d'une grandeur eſt une eſpece qui meſure ou cette grandeur ou des coordonnées qui l'epuiſent. Si une meſure de la grandeur eſt exprimée par une eſpece qu'epuiſent deux coordonnées (c'eſt à dire une partie & une autre qui lui eſt coordonnée) meſurées l' une & l' autre par l' unité, cette meſure eſt l'unité priſe *deux* fois. Si une meſure de la grandeur eſt exprimée par une eſpece qu' epuiſent deux coordonnées dont l'une

l' une ſoit l'unité priſe deux fois & l'autre ſoit meſurée par cette unité, cette meſure eſt l'unité priſe *trois* fois. Et en general, ſi une meſure de la grandeur eſt exprimée par l'unité ou par une eſpece qu'epuiſent deux coordonnées que l'unité meſure ou en continuant d'exprimer une partie dont on ne connoiſſe autre choſe ſinon qu'elle eſt coordonnée à celles que l'on a exprimées & qu'elle eſt meſurée par l'unité, cette meſure eſt l'unité priſe un *nombre* de fois. Soit *A* une grandeur. Si z meſure *A*, ou ſi z meſure des coordonnées qui epuiſent *A*, z eſt une Unité de *A*. Si Z meſure *A* & que l'on entende par *Z* une eſpece epuiſée par deux coordonnées que z meſure, Z eſt z priſe deux fois. Si *Y* meſure *A* & que l'on entende par *Y* une eſpece epuiſée par deux coordonnées dont l'une ſoit z priſe deux fois & l'autre ſoit meſurée par z, *Y* eſt z priſe trois fois. Et ſi *V* meſure de *A* eſt exprimée par z ou par une eſpece qu'epuiſent deux coordonnées meſurées par z ou en continuant d'exprimer une eſpece par laquelle on entende une partie de *V* coordonnée à celles que l'on a exprimées & meſurée par z, *V* eſt z priſe un nombre de fois.

THEOREME LXI.

La grandeur qu'epuiſent des coordonnées toutes meſurées par une certaine eſpece eſt meſurée par un nombre dont cette eſpece eſt l'unité. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *DEFG*. Si ces coordonnées ſont toutes meſurées par une

efpece z, *A* eft mefurée par une efpece qui eft z prife un nombre de fois.

A etant une grandeur epuifée par les coordonnées *DEFG*, une efpece *I* qui mefure *A* eft epuifée par les coordonnées *MNOP* telles que *M* mefure *D*, que *N* mefure *E*, que *O* mefure *F* & que *P* mefure *G par Theor. 32. 35 & 38.* Chacune des coordonnées *DEFG* etant mefurée par l'efpece z, chacune des coordonnées *MNOP* eft auffi mefurée par z *par Theor. 48. Cor.* *DE* epuifent un Tout *C par Theor. 28.* & *MN* epuifent un Tout *L* qui *par Theor. 46.* mefure *C*.

Suppofé donc que l'on entende par *V* une efpece epuifée par deux coordonnées *XY* dont chacune foit mefurée par z. Puifque *L* renferme l'attribut commun de *V*, *L* eft ou comprend *V*, d'où il fuit que *V* ne compofe point *C*. Il eft evident auffi que *M* eft ou comprend *X* & que *N* eft ou comprend *Y*. *V* mefure donc *C par Theor. 45.*

CF epuifent un Tout *B* & *LO* epuifent un Tout *K* qui mefure *B*. Suppofé donc que l'on entende par *T* une efpece epuifée par deux coordonnées dont l'une foit *V* & l'autre foit mefurée par z. On prouvera de même que *K* eft ou comprend *T* & que *T* mefure *B*.

Suppofé enfin que l'on entende par *S* une efpece epuifée par deux coordonnées dont l'une foit *T* & l'autre foit mefurée par z. *I* eft ou com-

comprend *S* & *S* meſure *A*. Or ce que l'on a entendu par *V*, par *T* & par *S* fait voir que *S* eſt z priſe un nombre de fois.

EXEMPLE. Suppoſons qu'une piece d'etoffe ſoit epuiſée par des coordonnées dont chacune ait la longueur d'une aune. Cette meſure de la partie ſera l'unité de la piece & une meſure de la piece ſera cette unité priſe un nombre de fois.

COROLLAIRE I.

Soit *A* une grandeur epuiſée par des coordonnées *DEFG* toutes meſurées par z. *C* epuiſée par *D E* eſt meſurée par *V* qui eſt z priſe deux fois. *B* epuiſée par *C F* eſt meſurée par *T* qui eſt z priſe trois fois & *A* eſt meſurée par *S* qui eſt z priſe quatre fois. On voit donc que *V* ſert à exprimer *T* & que *T* ſert à exprimer *S.* Ainſi de deux nombres qui ont la même unité & qui ne ſont pas le même l'un ſert à exprimer l'autre & la grandeur que le ſecond de ces nombres meſure eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt meſurée par le premier nombre & l'autre eſt meſurée par l'unité de ces nombres ou epuiſée par des coordonnées que cette unité meſure.

COROLLAIRE II.

Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *DEFG* toutes meſurées par z. Soit *I* une meſure de *A*. Soit *R* une eſpece qui meſure *A* & qui ſoit z priſe un nombre de fois. On a prouvé que *I* eſt ou comprend une eſpece *S* qui meſure *A* & qui eſt z priſe un nombre de

 fois.

fois. Or par le Corollaire precedent *R* eſt la même que *S*. Toute eſpece donc qui meſure la grandeur eſt ou comprend le nombre qui meſure cette grandeur & qui eſt epuiſé par des coordonnées que l'unité meſure.

THEOREME LXII.

L'unité du nombre qui meſure une grandeur eſt une unité de cette grandeur. Soit *A* une grandeur. Soit *Z* une eſpece qui ſoit z priſe un nombre de fois. Si *Z* meſure *A*, z eſt une unité de *A*.

La grandeur *A* etant meſurée par *Z* qui eſt z priſe un nombre de fois, ſi *Z* eſt z, z meſure *A* & par conſequent z eſt une unité de *A*. Si *Z* eſt epuiſée par des coordonnées que z meſure, chacune de ces coordonnées de *Z* meſure une partie de *A par Theor. 33.* Ces parties de *A* qui ſont meſurées par des coordonnées de *Z* ſont coordonnées *par Theor. 37.* & epuiſent *A par Theor. 39.* Or chacune de ces parties de *A* eſt meſurées par z *par Theor. 43.* Ainſi z eſt une unité de *A*.

THEOREME LXIII.

Deux grandeurs dont l'une eſt plus grande qu'une partie de l'autre ſont egales ou inegales. Soient *A* & *O* deux grandeurs. Soit *T* une partie de *O*. Si *A* eſt plus grande que *T*, *A* eſt egale à *O* ou plus grande ou moindre que *O*.

Les

Les grandeurs *A O* etant telles que *A* eſt plus grande que *T* partie de *O*, *H* partie de *A* eſt egale à *T*. *A* eſt donc epuiſée par des coordonnées qui ſont toutes egales à *H* ou par les coordonnées *D I* telles que *D* eſt epuiſée par des coordonnées toutes egales à *H* & que *I* eſt moindre que *H par Theor.59.* & *O* eſt epuiſée par des coordonnées toutes egales à *T* ou par les coordonnées *P V* telles que *P* eſt epuiſée par des coordonnées toutes egales à *T* & à *H* & que *V* eſt moindre que *T* & que *H*. Toutes les coordonnées de *A* & de *O* qui ſont egales à *H* ont une même meſure z *par Theor.51. Cor.* Donc *par Theor. 61.* *A* & *O* ou *D* & *P* ou *A* & *P* ſont meſurées par z priſe un nombre de fois.

Dans le premier cas *A* & *O* etant meſurées par des nombres dont z eſt l'unité, ou ces nombres ſont le même ou celui qui meſure l'une de ces grandeurs meſure une partie de l'autre *par Theor. 61. Cor. 1.* *A* eſt donc egale à *O* ou plus grande ou moindre que *O*.

Dans le ſecond cas *D* eſt par la même raiſon egale à *P* ou plus grande ou moindre que *P* & *I V* etant moindres que *H* ſont egales ou inegales *par Theor. 60.* Si donc *D* eſt egale à *P* & que *I* ſoit egale à *V*, *A* eſt egale à *O par Theor.54.* & ſi *D* etant egale à *P*, *I* eſt plus grande que *V*, *A* eſt plus grande que *O par Theor.56.*

Si *D* eſt plus grande que *P*, *D* eſt epuiſée par les coordonnées *E F* telles que *E* eſt egale

à *P*

à *P* & que *F* eſt egale à *H* ou epuiſée par des coordonnées toutes egales à *H par Theor. 61. Cor. 1.* *O* etant donc epuiſée par *P V* & *V* etant moindre que *H* & que *F*, il s'enſuit *par Theor. 56. Cor. & 53.* que *D* & par conſequent *A* eſt plus grande que *O*.

Dans le troiſieme cas *A* & *P* ſont egales ou inegales. Si *A* eſt egale à *P* ou moindre que *P*, *A* eſt moindre que *O* & ſi *A* eſt plus grande que *P*, *A* eſt epuiſée par les coordonnées *B C* telles que *B* eſt egale à *P* & que *C* eſt egale à *H* ou epuiſée par des coordonnées toutes egales à *H*. *O* etant donc epuiſée par *P V* & *V* etant moindre que *H* & que *C*, *A* eſt plus grande que *O*.

THEOREME LXIV.

Les grandeurs egales ou inegales à une troiſieme ſont egales ou inegales entre elles. Soient *A B C* des grandeurs. Si *A B* ſont egales ou inegales & que *B C* ſoient egales ou inegales, *A C* ſont egales ou inegales.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A B* ſont egales ou inegales & que *B C* ſont egales ou inegales, ſuppoſons que *B* ſoit egale à *C*. Si *A* eſt egale à *B*, *A* eſt egale à *C par Theor. 51.* Si *A* eſt plus grande que *B*, *A* eſt plus grande que *C par Theor. 53.* & ſi *A* eſt moindre que *B*, *A* eſt moindre que *C par Theor. 52.*

Suppoſons que *B* ſoit plus grande que *C*. Si *A* eſt egale à *B*, *A* eſt plus grande que *C par Theor. 52.* Si *A* eſt plus grande que *B*, *A* eſt plus

plus grande que *C* *par Theor. 53.* & si *A* est moindre que *B*, *AC* sont egales ou inegales *par Theor. 60.*

Supposons que *B* soit moindre que *C*. Si *A* est egale à *B* ou moindre que *B*, *A* est moindre que *C* *par Theor. 53.* & si *A* est plus grande que *B*, *A* est plus grande qu'une partie de *C*, d'où il suit *par Theor. 63.* que *AC* sont egales ou inegales.

THEOREME LXV.

La moindre de deux grandeurs qui n'ont pas la même unité a des parties & chacune de ses parties a des parties. Soient *A E* des grandeurs telles que *A* soit plus grande que *E*. Si *E* n'a point d'unité qui soit une unité de *A*, *E* a des parties & toute partie de *E* a des parties.

Les grandeurs *A E* etant telles que *E* n'a point d'unité qui soit une unité de *A*, aucune mesure de *E* n'est une unité de *A*. *A* n'est donc pas epuisée par des coordonnées toutes egales à *E* *par Theor. 51. Cor.* *A* etant plus grande que *E*, *A* est donc epuisée par des coordonnées toutes egales à *E* à l'exception d'une qui est moindre que *E* *par Theor. 59.* *E* qui est plus grande qu'une autre grandeur a donc des parties.

Soit *F* une partie de *E*. Si *F* n'est pas mesurée par une unité de *E*, *E* n'est pas epuisée par des coordonnées toutes egales à *F* *par Theor. 51. Cor.* d'où il suit *par Theor. 59.* que *E* est epuisée par des coordonnées toutes egales à *F* à l'exception d'une qui est moindre *F*. Si *F* est me-

mesurée par une unité de *E*, *A* etant *par Theor.53.* plus grande que *F*, *A* est epuisée par des coordonnées toutes egales à *F* à l'exception d'une qui est moindre que *F*. *F* plus grande qu'une autre grandeur a donc des parties.

THEOREME LXVI.

Deux grandeurs etant egales ou inegales, si l'une a des parties & que chacune de ses parties ait des parties, l'autre aussi a des parties & chacune de ses parties a des parties. Soient *C E* deux grandeurs egales ou inegales. Si *E* a des parties & que chaque partie de *E* ait des parties, *C* a des parties & chaque partie de *C* a des parties.

Les grandeurs *C E* etant egales ou inegales, si *C* est plus grande que *E*, *C* a des parties. Si *C* est egale à *E*, *E* ayant des parties, *C* est plus grande que *F* partie de *E par Theor.52.* & si *C* est egale à *F*, *F* ayant des parties, *C* est plus grande que *G* partie de *F*. *C* a donc des parties.

Soit *D* une partie de *C*. *D E* sont egales ou inegales *par Theor. 64.* Ce que l'on a prouve fait donc voir que *D* a des parties.

THEOREME LXVII.

Si deux grandeurs sont egales & que l'unité de l'une mesure une de ses parties, le nombre qui a cette unité & qui mesure cette grandeur mesure l'autre. Soient *A B* deux grandeurs egales. Soit Z une espece qui mesure *A* & qui soit z prise un nombre de fois. Si z mesure une partie de *A*, *Z* mesure *B*.

Les

Les grandeurs *A B* etant egales, une eſpece *V* meſure *A* & *B*. *A* etant meſurée par *Z* qui eſt z priſe un nombre de fois & z meſurant une partie de *A*, *Z* n'eſt pas z & par conſequent *Z* eſt epuiſée par des coordonnées que z meſure. *V* eſt donc *Z* ou comprend *Z* *par Theor. 61. Cor. 2.* Donc *Z* meſure *B* *par Theor. 44.*

THEOREME LXVIII.

Si l'unité d'une grandeur meſure une autre grandeur & qu'une unité de la premiere ſoit l'unité d'un nombre qui meſure la ſeconde, ce nombre eſt une unité de la premiere. Soient *AB* des grandeurs telles que *B* ſoit meſurée par une unité de *A*. Soit z l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *B*. Si z eſt une unité de *A*, *Z* eſt une unité de *A*.

Les grandeurs *A B* etant telles que z unité de *A* eſt l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *B*, ſuppoſé que z meſure *B*, *Z* eſt une unité de *A*.

Suppoſé que z meſure une partie de *B*. *B* etant meſurée par une unité de *A*, ſi cette unité meſure *A*, *A* eſt egale à *B* & *Z* meſure *A* *par Theor. 67.* & par conſequent *Z* eſt une unité de *A*. Si cette unité de *A* qui meſure *B*, meſure des coordonnées qui epuiſent *A*, chacune de ces coordonnées etant egale à *B*, eſt meſurée par *Z*, d'où il ſuit encore *par Theor. 61 & 62.* que *Z* eſt une unité de *A*.

THEO-

THEOREME LXIX.

L'unité mesurant une partie de la grandeur en mesure toute autre partie qui est egale à celle là. Soient *B C* deux parties egales de la grandeur *A*. Soit *u* une unité de *A*. Si *u* mesure *B*, *u* mesure *C*.

La grandeur *A* etant telle que *B C* sont des parties egales de *A* & que *B* est mesurée par *u* unité de *A*, *A* est epuisée par des coordonnées *DFHK* toutes mesurées par *u*. Si *C* est quelqu'une de ces coordonnées, *u* mesure *C*.

Si *C* n'est aucune de ces coordonnées, *C* etant egale à *B* & à *D*, *C* n'est pas partie de *D* & par la même raison *D* n'est pas partie de *C*. *C* est donc epuisée par des coordonnées dont chacune est partie de quelqu'une des especes *DFHK par Theor. 29.* Supposons donc que *C* soit epuisée par les coordonnées *EGI* telles que *E* soit partie de *D*, que *G* soit partie de *F* & que *I* soit partie de *H*. Chacune des especes *D F H* etant mesurée par *u*, *u* a des parties *xyz* telles que *x* mesure *E*, que *y* mesure *G* & que z mesure *I par Theor. 32.* Donc *par Theor. 58.* *u* mesure *C*.

THEOREME LXX.

La grandeur qu'epuisent des coordonnées mesurées par des nombres qui ont la même unité est mesurée par un nombre qui a cette unité. Soit *A* une grandeur epuisée par les coordonnées *BCDE*. Si

Si *B* eſt meſurée par une eſpece qui ſoit z priſe un nombre de fois & que chacune des coordonnées *CDE* ait auſſi une meſure qui ſoit z priſe un nombre de fois, *A* eſt meſurée par un nombre qui a cette unité.

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *B C D E* dont chacune eſt meſurée par une eſpece qui eſt z priſe un nombre de fois, ſi z meſure une partie de *B*, *B* eſt epuiſée par des coordonnées toutes meſurées par z. Soit donc que chacune de ces parties *B C D E* ſoit meſurée par z ou que quelqu'une d'entre elles ou toutes ſoient meſurées par un autre nombre qui ait cette unité, il paroit *par Theor. 27.* que *A* eſt epuiſée par des coordonnées toutes meſurées par z. *A* eſt donc meſurée par une eſpece qui eſt z priſe un nombre de fois *par Theor. 61.*

COROLLAIRE.

Il ſuffit donc de connoitre les nombres qui ayant tous une même unité meſurent les coordonnées qui epuiſent une grandeur, pour connoitre la *ſomme* de ces nombres, c'eſt à dire un nombre qui meſure cette grandeur & qui ait cette unité.

THEOREME LXXI.

Si la grandeur meſurée par un nombre qui a une certaine unité eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une ſoit meſurée par un nombre qui ait cette unité, l'autre coordonnée eſt auſſi meſurée par un nombre qui a cette unité. Soit *A* une grandeur

epuiſée par les coordonnées *B C*. Soit *V* une eſpece qui meſure *A*. Soit *X* une eſpece qui meſure *B*. Si *V* eſt z priſe un nombre de fois & que *X* ſoit auſſi z priſe un nombre de fois, *C* eſt meſurée par une eſpece qui eſt z priſe un nombre de fois.

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *BC* telles que z eſt l'unité d'un nombre *V* qui meſure *A* & d'un nombre *X* qui meſure *B*, *A* eſt epuiſée par les coordonnées *FG* telles que *X* meſure *F* & que *G* eſt ou meſurée par z ou epuiſée par des coordonnées que z meſure *par Theor. 61. Cor. 1.* *B* etant egale à *F*, *C* eſt egale à *G par Theor. 55.* Si donc z meſure *G*, z meſure *C par Theor. 69.* & ſi *G* eſt epuiſée par des coordonnées toutes meſurées par z, *G* eſt meſurée par un nombre dont z eſt l'unité *par Theor. 61.* & ce nombre meſure *C par Theor. 67.*

COROLLAIRE.

Il ſuffit donc de connoitre deux nombres qui ayent la même unité & dont l'un meſure une grandeur & l'autre meſure l'une des deux coordonnées qui epuiſent cette grandeur, pour connoitre le *reſte* de ce premier nombre, c'eſt à dire un nombre qui meſure l'autre coordonnée & qui ait cette unité.

THEOREME LXXII.

La grandeur meſurée par un nombre dont l'unité eſt une certaine eſpece priſe un nombre de fois eſt meſurée par un nombre dont cette eſpece eſt l'unité.

l'unité. Soit *u* l'unité d'un nombre *V* qui mesure la grandeur *A*. Si *u* est z prise un nombre de fois, *A* est mesurée par un nombre dont z est l'unité.

La grandeur *A* etant mesurée par le nombre *V* dont *u* est l'unité, *u* est une unité de *A par Theor.62.* Si donc *u* mesure *A*, *u* etant z prise un nombre de fois, *A* est mesurée par un nombre dont z est l'unité. Si *A* est epuisée par des coordonnées que *u* mesure, il s'ensuit *par Theor. 70.* que *A* est mesurée par un nombre dont z est l'unité.

COROLLAIRE.

Si l'on fait donc que *u* unité de la grandeur *A* est z prise un nombre de fois, il suffit de connoitre encore le nombre *V* qui mesure *A* & dont *u* est l'unité pour connoitre le nombre *Z* qui mesure *A* & dont z est l'unité, ou de connoitre *Z* pour connoitre *V*. *Z* est le produit de *u* multiplié par *V*. *V* est le quotient de *Z* divisé par *u*. De deux nombres qui mesurent la même grandeur & qui sont tels que l'unité du premier est un nombre qui a l'unité du second, le second est le *produit* de l'unité du premier *multipliée* par le premier: & le premier est le *quotient* du second *divisé* par l'unité du premier.

THEOREME LXXIII.

De deux nombres qui ont la même unité ou l'un est le diviseur de l'autre ou l'un est la somme d'un nombre qui a l'autre pour diviseur & d'un nombre qui mesure une partie de la grandeur que

ce diviseur mesure. Soient *A E* deux grandeurs. Soient *t u* deux nombres qui ayent l'unité z & qui soient tels que *t* mesure *A* & que *u* mesure *E*. Si *t* n'est pas l'unité d'un nombre qui mesure *E* & que *u* ne soit pas l'unité d'un nombre qui mesure *A*, *A* est epuisée par les coordonnées *B D* telles que *B* est mesurée par un nombre dont *u* est l'unité & que *D* est mesurée par un nombre dont z est l'unité & qui mesure une partie de la grandeur mesurée par *u*.

Les nombres *t u* qui ont l'unité z etant tels que *t* mesure la grandeur *A* & que *u* mesure la grandeur *E*, il paroit par la definition du Nombre que *u* est l'unité d' un nombre *V* qui mesure *E* & puisque *t* n'est pas l'unité d' un nombre qui mesure *E*, *t* n'est pas *u*.

L'un de ces nombres mesure donc une partie de la grandeur que l'autre mesure *par Theor. 61. Cor. 1.* Supposons donc que *u* mesure *C* partie de *A*. *u* n'etant pas l'unité d'un nombre qui mesure *A* & z etant l'unité de *t*, *u* n'est pas z & par consequent z mesure une partie de *C*, d'où il suit *par Theor. 67.* que toute grandeur egale à *C* est mesurée par *u*. *A* qui *par Theor. 61.* n'est pas epuisée par des coordonnées toutes mesurées par *u* n'est donc pas epuisée par des coordonnées toutes egales à *C*, d'où il suit *par Theor. 59.* que *A* est epuisée par des coordonnées toutes egales à *C* à l'exception d' une qui est moindre que *C*. Soit cette coordonnée appellée *D*. *A* est epuisée par les coordonnées *B D*.

Si

Si *B* eſt egale à *C*, *B* eſt meſurée par *u* & par un nombre *V* dont *u* eſt l' unité & ſi *D* epuiſe *A* avec pluſieurs coordonnées egales à *C*, toutes ces coordonnées epuiſent *B* *par Theor. 25.* *B* eſt donc encore meſurée par un nombre dont *u* eſt l'unité *par Theor. 61.*

Enfin *A* etant meſurée par *t* dont z eſt l'unité & *B* etant auſſi *par Theor.* 72. meſurée par un nombre dont z eſt l'unité, *D* eſt auſſi meſurée par un nombre dont z eſt l'unité *par Theor. 71.* & ce nombre n'etant pas *u* puiſque *D* eſt moindre que *C*, il s'enſuit *par Theor. 61. Cor. 1.* que ce nombre meſure une partie de la grandeur que *u* meſure.

COROLLAIRE.

Il ſuit de là que de deux nombres epuiſés par des coordonnées que la même unité meſure & dont l'un eſt cette unité priſe deux fois ou celui ci eſt le diviſeur de l'autre ou l'autre eſt la ſomme d'un nombre qui a ce diviſeur & de cette unité.

DEFINITION VIII.

Un nombre eſt *ſemblable* à un autre ſi l'unité d'aucun de ces nombres ne meſure des coordonnées qui l' epuiſent ſans que l'unité de l'autre meſure des coordonnées qui l' epuiſent & qui ſoient telles que pour chacune de ces coordonnées du premier on exprime une de ces coordonnées du ſecond. Suppoſé qu'une eſpece *O* qui meſure la grandeur *A* ſoit *o* priſe un nombre de fois & qu'une eſpece *V* qui meſure la grandeur

 B ſoit

B ſoit *u* priſe un nombre de fois. Si *o* meſure *A* & que *u* meſure *B*, ou ſi *O* etant epuiſée par des coordonnées *P Q* &c. toutes meſurées par *o*, *V* eſt auſſi epuiſée par des coordonnées *X Y* &c. toutes meſurées par *u* & que pour chacune de ces coordonnées *P Q* &c. que l'on exprime on exprime une de ces coordonnées *X Y* &c. & que pour chacune de celles ci *X Y* &c. on exprime une de celles ci *P Q* &c. le nombre *O* eſt ſemblable au nombre *V*.

THEOREME LXXIV.

Si deux nombres ne ſont pas ſemblables, une partie de la grandeur que l'un meſure eſt meſurée par un nombre qui a l'unité de celui là & qui eſt ſemblable à l'autre. Soit *O* une eſpece qui meſure la grandeur *A* & qui ſoit *o* priſe un nombre de fois. Soit *V* une eſpece qui meſure la grandeur *B* & qui ſoit *u* priſe un nombre de fois. Si *O* n'eſt pas ſemblable à *V*, une partie de *A* eſt meſurée par une eſpece qui eſt *o* priſe un nombre de fois & qui eſt ſemblable à *V*.

La grandeur *A* etant meſurée par *O* qui eſt *o* priſe un nombre de fois & la grandeur *B* etant meſurée par *V* qui eſt *u* priſe un nombre de fois, ſi *o* meſuroit *A* & que *u* meſurat *B*, *O* ſeroit ſemblable à *V*. Suppoſé donc que *u* meſure *B*, *O* n'etant pas ſemblable à *V*, il s'enſuit que *o* ne meſure pas *A*. *o* meſure donc une partie de *A* *par Theor. 62.* Cette partie de *A* eſt donc meſurée par un nombre *n* qui eſt *o* priſe un nombre de fois & *n* eſt ſemblable à *V*.

Suppo-

Supposé que *O* etant epuisée par des coordonnées que *o* mesure, *V* soit aussi epuisée par des coordonnées que *u* mesure. Il paroit par la definition du Nombre que si *O* n'est pas *o* prise deux fois, une partie de *O* est *o* prise deux fois. Supposé donc que *V* soit *u* prise deux fois. *O* n'etant pas semblable à *V* n'est pas *o* prise deux fois. Une partie de *O* est donc *o* prise deux fois. Or cette partie de *O* mesure une partie de *A par Theor. 33.* Une partie de *A* est donc mesurée par une espece qui est *o* prise un nombre de fois & qui est semblable à *V*.

Supposé qu'une partie de *O* etant *o* prise deux fois une partie de *V* soit aussi *u* prise deux fois. Si *O* n'est pas *o* prise trois fois, une partie de *O* est *o* prise trois fois. Supposé donc que *V* soit *u* prise trois fois, *O* n'etant pas semblable à *V* n'est pas *o* prise trois fois. Une partie de *O* est donc *o* prise trois fois. Or cette partie de *O* mesure une partie de *A*. Une partie de *A* est donc mesurée par une espece qui est *o* prise un nombre de fois & qui est semblable à *V*.

Supposé qu'une partie de *O* etant *o* prise trois fois une partie de *V* soit aussi *u* prise trois fois. En continuant donc d'exprimer deux nombres epuisés chacun par deux coordonnées dont l'une est le nombre precedent & l'autre est mesurée par l'unité de ce nombre on exprimera enfin une espece qui sera *o* prise un nombre de fois & qui mesurera une partie de *A* & sera semblable à *V*.

EXEMPLE. Supposé qu'il y ait dans une famille un nombre de fils & un nombre de filles & que ces deux nombres ne soient pas semblables. S'il ne s'y trouve donc qu'un fils, ce nombre etant semblable à celui d'une fille, il doit s'y trouver plusieurs filles & par consequent une partie du nombre des filles est mesurée par un nombre semblable au nombre des fils. Supposé qu'il s'y trouve plusieurs fils & plusieurs filles, le nombre des fils ou une partie de ce nombre doit etre deux fils & le nombre des fils n'etant point semblable à celui des filles, on prouvera que l'un de ces nombres est semblable à une partie de l'autre.

THEOREME LXXV.

Les nombres semblables à un troisieme sont semblables entre eux. Soient *ABC* des grandeurs telles que *I* mesure de *A* soit *i* prise un nombre de fois, que *O* mesure de *B* soit *o* prise un nombre de fois & que *V* mesure de *C* soit *u* prise un nombre de fois. Si *I* est semblable à *O* & que *O* soit semblable à *V*, *I* est semblable à *V*.

Les grandeurs *ABC* etant telles que *I* mesure de *A* est *i* prise un nombre de fois, que *O* mesure de *B* est *o* prise un nombre de fois, que *V* mesure de *C* est *u* prise un nombre de fois : supposé que *i* mesure *A*. Puisque *I* est semblable à *O*, *o* mesure *B* & puisque *O* est semblable à *V*, *o* mesurant *B*, il s'ensuit que *u* mesure *C*. *I* est donc semblable à *V*.

Suppo-

Suppoſé que *I* ſoit epuiſé par des coordonnées *KL* &c. que *i* meſure. *O* qui eſt ſemblable à *I* eſt donc auſſi epuiſé par des coordonnées *PQ* &c. que *o* meſure & telles que pour chacune des coordonnées *KL* &c. que l'on exprime on exprime une coordonnée de celles ci *PQ* &c. & que pour chacune des coordonnées *PQ* &c. on exprime une de celles ci *KL* &c. Or *O* qui eſt ſemblable à *V* etant epuiſé par les coordonnées *PQ* &c. toutes meſurées par *o*, *V* eſt epuiſé par des coordonnées *XY* &c. toutes meſurées par *u* & telles que pour chacune des coordonnées *PQ* &c. on exprime une coordonnée de celles ci *XY* &c. & que pour chacune des coordonnées *XY* &c. on exprime une de celles ci *PQ* &c. On trouve donc pour chacune des coordonnées *KL* &c. une coordonnée de celles ci *XY* &c. & pour chacune des coordonnées *XY* &c. une de celles ci *KL* &c. Donc *I* eſt ſemblable à *V*.

THEOREME LXXVI.

Les nombres qui meſurent des grandeurs egales & dont les unitez meſurent des grandeurs egales ſont des nombres ſemblables. Soient *ABEF* des grandeurs telles que *O* meſure de *A* ſoit *o* priſe un nombre de fois & que *o* meſure *B*, que *V* meſure de *E* ſoit *u* priſe un nombre de fois & que *u* meſure *F*. Si *A* eſt egale à *E* & que *B* ſoit egale à *F*, *O* eſt ſemblable à *V*.

Les grandeurs *ABEF* etant telles que *O* meſure de *A* eſt *o* priſe un nombre de fois &

que *V* meſure de *E* eſt *u* priſe un nombre de fois: ſuppoſé que *o* meſure *A*. *B* que *o* meſure eſt donc egale à *A* & *A* etant egale à *E*, *B* eſt egale à *E*. *F* qui eſt egale à *B* eſt donc auſſi egale à *E* & par conſequent *u* qui meſure *F* meſure *E*. Donc *O* eſt ſemblable à *V*.

Suppoſé que *o* meſure une partie de *A*. *B* qui eſt meſurée par *o* eſt donc moindre que *E* qui eſt egale à *A*. *F* qui eſt egale à *B* eſt donc auſſi moindre que *E* & par conſequent *u* qui meſure *F* meſure une partie de *E*. *V* meſure donc *A par Theor. 67.* & toute partie de *A* que *o* meſure eſt meſurée par *u par Theor. 69.*

A eſt donc epuiſée par des coordonnées *CD* &c. toutes meſurées par *o* & par *u*. Il paroit donc *par Theor. 32. 35. 38 & 48. Cor.* que *O* eſt epuiſée par des coordonnées *P Q* &c. toutes meſurées par *o* & telles que *P* meſure *C*, que *Q* meſure *D* &c. Par la même raiſon *V* eſt epuiſée par des coordonnées *X Y* &c. toutes meſurées par *u* & telles que *X* meſure *C*, que *Y* meſure *D* &c. Ainſi pour chacune des coordonnées *P Q* &c. on exprime une des coordonnées *X Y* &c. & pour chacune des coordonnées *XY* &c. on exprime une des coordonnées *P Q* &c. Donc *O* eſt ſemblable à *V*.

THEOREME LXXVII.

Les grandeurs meſurées par des nombres ſemblables dont les unitez meſurent des grandeurs egales ſont egales entre elles. Soient *A B E F* des gran-

grandeurs telles que *y* qui meſure *B* ſoit l'unité d'un nombre *Y* qui meſure *A* & que z qui meſure *F* ſoit l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *E.* Si *Y* eſt ſemblable à *Z* & que *B* ſoit egale à *F*, *A* eſt egale à *E*.

Le nombre *Y* qui meſure la grandeur *A* etant ſemblable au nombre *Z* qui meſure la grandeur *E*, ſi *y* l'unité de *Y* meſure *A*, z l'unité de *Z* meſure *E* & puiſque *y* meſure la grandeur *B* & que z meſure la grandeur *F*, *A* eſt egale à *B* & *E* eſt egale à *F*. *B* etant egale à *F*, *A* eſt donc egale à *E par Theor.51.*

Suppoſé que *Y* ſoit epuiſé par deux coordonnées que *y* meſure. *Z* eſt auſſi epuiſé par deux coordonnées que z meſure. *A* eſt epuiſée par deux coordonnées que *y* meſure *par Theor. 33.37.39 & 43.* Par la même raiſon *E* eſt epuiſée par deux coordonnées que z meſure. Or *B* etant egale à *F*, ces coordonnées de *A* qui ſont meſurées par *y* ſont egales à ces coordonnées de *E* qui ſont meſurées par z. *A* eſt donc egale à *E par Theor.54.*

Suppoſé que *Y* ſoit epuiſé par deux coordonnées dont l'une ſoit *y* priſe deux fois & l'autre ſoit meſurée par *y*. *Z* eſt auſſi z priſe trois fois. *A* & *E* ſont donc epuiſées chacune par deux coordonnées telles que l'une de ces coordonnées de *A* qui eſt meſurée par *y* priſe deux fois eſt egale à l'une de ces coordonnées de *E* qui eſt meſurée par z priſe deux fois & que l'autre coordonnée de *A* qui eſt meſurée par *y* eſt egale

egale à l'autre coordonnée de *E* qui eſt meſurée par z. *A* eſt donc egale à *E*.

Suppoſé qu'une partie de *Y* ſoit *y* priſe trois fois, une partie de *Z* eſt auſſi z priſe trois fois. En continuant donc d'exprimer deux nombres ſemblables qui meſurent des grandeurs egales on en exprimera enfin deux dont l'un ſera la meſure de *A* & l'autre celle de *E*.

COROLLAIRE.

Comme *par Theor. 61. Cor. 1.* de deux nombres qui ont la même unité & qui ne ſont pas le même l'un meſure une partie de la grandeur que l'autre meſure, il s'enſuit que deux nombres qui ont la même unité & qui ne ſont pas le même ne ſont pas ſemblables. Donc deux nombres ſemblables ſont le même s'ils ont la même unité.

THEOREME LXXVIII.

Si de deux nombres ſemblables l'unité de l'un meſure une grandeur plus grande que celle que meſure l'unité de l'autre, la grandeur meſurée par le premier eſt plus grande que la grandeur meſurée par le ſecond. Soient *A B E F* des grandeurs telles que *y* qui meſure *B* ſoit l'unité d'un nombre *Y* qui meſure *A* & que z qui meſure *F* ſoit l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *E*. Si *Y* eſt ſemblable à *Z* & que *B* ſoit plus grande que *F*, *A* eſt plus grande que *E*.

Le nombre *Y* qui meſure la grandeur *A* etant ſemblable au nombre *Z* qui meſure la grandeur *E*, ſi *y* l'unité de *Y* meſure *A*, z l'unité

de

de *Z* meſure *E* & puiſque *y* meſure la grandeur *B* & que z meſure la grandeur *F*, *A* eſt egale à *B* & *E* eſt egale à *F*. *B* etant plus grande que *F*, *A* eſt donc plus grande que *E* *par Theor. 52 & 53.*

Suppoſé que *Y* ſoit epuiſé par deux coordonnées que *y* meſure. *Z* eſt auſſi epuiſé par deux coordonnées que z meſure. *A* eſt epuiſée par deux coordonnées que *y* meſure *par Theor. 33. 37. 39 & 43.* *E* eſt auſſi epuiſée par deux coordonnées que z meſure. Or *B* etant plus grande que *F*, *A* eſt plus grande que *E* *par Theor. 56. Cor.*

Suppoſé que *Y* ſoit epuiſé par deux coordonnées dont l'une ſoit *y* priſe deux fois & l'autre ſoit meſurée par *y*. *Z* eſt auſſi z priſe trois fois. *A* & *E* ſont donc epuiſées chacune par deux coordonnées telles que l'une de ces coordonnées de *A* qui eſt meſurée par *y* priſe deux fois eſt plus grande que l'une de ces coordonnées de *E* qui eſt meſurée par z priſe deux fois & que l'autre coordonnée de *A* qui eſt meſurée par *y* eſt plus grande que l'autre coordonnée de *E* qui eſt meſurée par z. *A* eſt donc plus grande que *E*.

Suppoſé qu'une partie de *Y* ſoit *y* priſe trois fois, une partie de *Z* eſt auſſi z priſe trois fois. En continuant donc d'exprimer deux nombres ſemblables dont l'un meſure une grandeur plus grande que la grandeur meſurée par l'autre, on en exprimera enfin deux dont le premier ſera la meſure de *A* & le ſecond celle de *E*.

THEO-

THEOREME LXXIX.

Les grandeurs mesurées par les unitez des nombres semblables qui mesurent des grandeurs egales sont egales entre elles. Soient *A B E F* des grandeurs telles que *y* qui mesure *B* soit l'unité d'un nombre *Y* qui mesure *A* & que z qui mesure *F* soit l'unité d'un nombre *Z* qui mesure *E*. Si *Y* est semblable à *Z* & que *A* soit egale à *E*, *B* est egale à *F*.

Le nombre *Y* qui mesure la grandeur *A* etant semblable au nombre *Z* qui mesure la grandeur *E*, si *y* l'unité de *Y* mesure *A*, z l'unité de *Z* mesure *E* & puisque *y* mesure la grandeur *B* & que z mesure la grandeur *F*, *A* est egale à *B* & *E* est egale à *F*. *A* etant egale à *E*, *B* est donc egale à *F* *par Theor. 51.*

Si *y* mesure une partie de *A*, z mesure une partie de *E*. *A* est donc plus grande que *F* *par Theor. 52 & 53.* *BF* sont donc egales ou inegales *par Theor. 60.* Or *A* etant egale à *E*, *BF* ne sont pas inegales *par Theor. 78.* *B* est donc egale à *F*.

THEOREME LXXX.

Si de deux nombres semblables l'un mesure une grandeur plus grande que celle que l'autre mesure, l'unité du premier mesure une grandeur plus grande que celle qui est mesurée par l'unité du second. Soient *A B E F* des grandeurs telles que *y* qui mesure *B* soit l'unité du nombre *Y* qui mesure *A* & que z qui mesure *F* soit l'unité d'un nombre

bre *Z* qui meſure *E*. Si *Y* eſt ſemblable à *Z* & que *A* ſoit plus grande que *E*, *B* eſt plus grande que *F*.

Le nombre *Y* qui meſure la grandeur *A* etant ſemblable au nombre *Z* qui meſure la grandeur *E*, ſi *y* l'unité de *Y* meſure *A*, z l'unité de *Z* meſure *E* & puiſque *y* meſure la grandeur *B* & que z meſure la grandeur *F*, *A* eſt egale à *B* & *E* eſt egale à *F*. *A* etant plus grande que *E*, *B* eſt donc plus grande que *F* *par Theor.52 & 53.*

Si *y* meſure une partie de *A*, z meſure une partie de *E*. *A* eſt donc plus grande que *F* *par Theor. 53.* *B F* ſont donc egales ou inegales *par Theor. 60.* Or *A* etant plus grande que *E*, *BF* ne ſont pas egales *par Theor. 77.* & *F* n'eſt pas plus grande que *B* *par Theor. 78.* *B* eſt donc plus grande que *F*.

THEOREME LXXXI.

De deux nombres qui meſurent des grandeurs egales l'un eſt ſemblable à un reſte de l'autre ſi l'unité du premier meſure une grandeur plus grande que celle que meſure l'unité du ſecond. Soient *ABEF* des grandeurs telles que *y* qui meſure *B* ſoit l'unité d'un nombre *Y* qui meſure *A* & que z qui meſure *F* ſoit l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *E*. Si *A* eſt egale à *E* & que *B* ſoit plus grande que *F*, une partie de *E* eſt meſurée par un nombre dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *Y*.

Les

Les grandeurs *A B E F* etant telles que *A* eſt egale à *E* & que *B* eſt plus grande que *F*, le nombre *Y* qui meſure *A* & dont l'unité *y* meſure *B* n'eſt pas ſemblable au nombre *Z* qui meſure *E* & dont l'unité *z* meſure *F par Theor. 78.* Or *A* etant egale à *E*, aucune partie de *A* n'eſt plus grande que *E*, d'où il ſuit encore *par Theor. 78.* qu'aucune partie de *A* n'eſt meſurée par un nombre dont *y* ſoit l'unité & qui ſoit ſemblable à *Z*. Donc *par Theor. 74.* une partie de *E* eſt meſurée par un nombre dont *z* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *Y*.

THEOREME LXXXII.

Le reſte d'un nombre eſt ſemblable à un reſte d'un autre nombre ſi ces deux nombres ſont ſemblables. Soient *A B E* des grandeurs telles que *u* ſoit l'unité d'un nombre *V* qui meſure *A* & d'un nombre *X* qui meſure *B* & que *z* ſoit l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *E*. Si *V* eſt ſemblale à *Z* & que *B* ſoit partie de *A*, une partie de *E* eſt meſurée par un nombre dont *z* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *X*.

La grandeur *A* etant meſurée par un nombre *V* dont *u* eſt l'unité & *u* etant l'unité d'un nombre *X* qui meſure *B* partie de *A*, *X* n'eſt pas ſemblable à *V par Theor. 77. Cor.* La grandeur *E* etant meſurée par un nombre *Z* dont *z* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *V*, *X* n'eſt donc pas ſemblable à *Z par Theor. 75.*

Or

Or *V* ne meſurant aucune partie de *B*, aucune partie de *B* n'eſt meſurée par un nombre dont *u* ſoit l'unité & qui ſoit ſemblable à *V par Theor.* 77. *Cor.* d'où il ſuit encore *par Theor.* 75. qu'aucune partie de *B* n'eſt meſurée par un nombre dont *u* ſoit l'unité & qui ſoit ſemblable à *Z*. Donc *par Theor.* 74. une partie de *E* eſt meſurée par un nombre dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *X*.

THEOREME LXXXIII.

La ſomme de pluſieurs nombres eſt ſemblable à la ſomme de pluſieurs autres, ſi pour chacun de ces premiers nombres l'on exprime un des ſeconds qui lui ſoit ſemblable & que pour chacun des ſeconds l'on exprime un des premiers qui lui ſoit ſemblable. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *BCD*. Soit *o* l'unité des nombres *OPQR* tels que *O* meſure *A*, que *P* meſure *B*, que *Q* meſure *C* & que *R* meſure *D*. Soit *E* une grandeur epuiſée par les coordonnées *FGH*. Soit *u* l'unité des nombres *VXYZ* tels que *V* meſure *E*, que *X* meſure *F*, que *Y* meſure *G* & que *Z* meſure *H*. Si *P* eſt ſemblable à *X*, que *Q* ſoit ſemblable à *Y* & que *R* ſoit ſemblable à *Z*, *O* eſt ſemblable à *V*.

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *BCD* & *o* etant l'unité des nombres *OPQR* tels que *P* meſure *B*, que *Q* meſure *C* & que *R* meſure *D*, ſuppoſons que chacun des nombres *P Q R* ſoit epuiſé par des coordonnées

que *o* meſure. La grandeur *E* etant epuiſée par les coordonnées *FGH* & *u* etant l'unité des nombres *VXYZ* tels que *X* qui eſt ſemblable à *P* meſure *F*, que *Y* qui eſt ſemblable à *Q* meſure *G* & que *Z* qui eſt ſemblable à *R* meſure *H*, chacun des nombres *XYZ* eſt epuiſé par des coordonnées que *u* meſure.

P etant epuiſé par des coordonnées que *o* meſure, *B* eſt auſſi epuiſée par des coordonnées que *o* meſure & pour chacune de ces coordonnées qui epuiſent *P* on exprime une de ces coordonnées qui epuiſent *B* & reciproquement *par Theor. 33. 37. 39 & 43.* *X* etant epuiſé par des coordonnées que *u* meſure, *F* eſt auſſi epuiſée par des coordonnées que *u* meſure & pour chacune de ces coordonnées qui epuiſent *X* on exprime une de ces coordonnées qui epuiſent *F* & reciproquement. *P* etant ſemblable à *X*, il paroit donc que pour chacune de ces coordonnées qui epuiſent *B* & qui ſont meſurées par *o* l'on exprime une de ces coordonnées qui epuiſent *F* & qui ſont meſurées par *u* & reciproquement. On prouvera de même que *o* meſure des coordonnées qui epuiſent *C*, que *u* meſure des coordonnées qui epuiſent *G* & que pour chacune de ces coordonnées qui epuiſent *C* on exprime une de ces coordonnées qui epuiſent *G* & reciproquement, &c.

A eſt epuiſée par toutes ces coordonnées dont les unes epuiſent *B*, les autres *C*, &c. *par Theor. 27.* & *E* eſt epuiſée par toutes ces coordonnées

données dont les unes epuiſent *F*, les autres *G*, &c. Il ſuit de là que pluſieurs coordonnées qui epuiſent *A* & qui ſont meſurées par *o* & pluſieurs coordonnées qui epuiſent *E* & qui ſont meſurées par *u* ſont telles que pour chacune de ces coordonnées de *A* on exprime une de ces coordonnées de *E* & reciproquement. Or puiſque *O* meſure *A*, ces coordonnées qui epuiſent *A* ſont meſurées par des coordonnées qui epuiſent *O* & que *o* meſure & qui ſont telles que pour chacune de ces coordonnées de *A* on exprime une de ces coordonnées de *O* & reciproquement *par Theor. 32. 35. 38 & 48. Cor.* & puiſque *V* meſure *E*, ces coordonnées qui epuiſent *E* ſont meſurées par des coordonnées qui epuiſent *V* & que *u* meſure & qui ſont telles que pour chacune de ces coordonnées de *E* on exprime une de ces coordonnées de *V* & reciproquement, d'où il ſuit que *O* & *V* ſont des nombres ſemblables.

Suppoſé qu'une ou pluſieurs des coordonnées *BCD* fuſſent meſurées par *o*, il eſt encore evident que cette concluſion ſeroit veritable.

THEOREME LXXXIV.

Si la ſomme de deux nombres eſt ſemblable à la ſomme de deux autres & que l'un de ces premiers nombres ſoit ſemblable à l'un des ſeconds, les deux autres nombres ſont ſemblables. Soit la grandeur *A* epuiſée par les coordonnées *BC*. Soit *o* l'unité des nombres *OPQ* tels que *O* meſure *A*, que *P* meſure *B* & que *Q* meſure *C*.

Soit la grandeur *E* mesurée par les coordonnées *G H*. Soit *t* l'unité des nombres *T X Y* tels que *T* mesure *E*, que *X* mesure *G* & que *Y* mesure *H*. Si *O* est semblable à *T* & que *P* soit semblable à *X*, *Q* est semblable à *Y*.

La grandeur *E* etant epuisée par les coordonnées *G H* & *t* etant l'unité des nombres *TXY* tels que *T* mesure *E*, que *X* mesure *G* & que *Y* mesure *H*, soit *Z* un nombre qui ait l'unité *t* & qui mesure *I* partie de *H*. Les coordonnées *G I* epuisent un Tout *F par Theor. 28.* *F* est partie de *E par Theor. 24.* *t* est l'unité d'un nombre *V* qui mesure *F par Theor. 70.* Or *T* n'est pas semblable à *V par Theor. 77. Cor.* & par consequent le nombre *O* dont *o* est l'unité & qui mesure la grandeur *A* etant semblable à *T* n'est pas semblable à *V par Theor. 75.* *A* n'est donc pas epuisée par deux coordonnées mesurées par des nombres qui ayent l'unité *o* & dont l'un soit semblable à *X* & l'autre soit semblable à *Z par Theor. 83.* Mais *A* est epuisée par les coordonnées *B C* & *o* est l'unité des nombres *P Q* tels que *P* qui est semblable à *X* mesure *B* & que *Q* mesure *C*. *Q* n'est donc pas semblable à *Z* à un nombre qui mesure une partie de *H* & dont *t* soit l'unité.

Par la même raison *Y* n'est pas semblable à un nombre qui ait l'unité *o* & qui mesure une partie de *C*. Donc *Q* est semblable à *Y par Theor. 74.*

THEO-

THEOREME LXXXV.

Le produit d'un nombre multiplié par un autre est aussi le produit d'un nombre qui est semblable à ce multiplicateur & dont le multiplicateur est semblable au premier nombre multiplié, ou pour s'exprimer autrement : *Le quotient d'un nombre divisé par un autre est semblable à un diviseur qui donne à ce même nombre un quotient semblable au premier diviseur.* Soit *t* l'unité d'un nombre *T* qui mesure la grandeur *A*. Si *t* est z prise un nombre de fois, (d'où il suit *par Theor.* 72. que z est l'unité d'un nombre *Z* qui mesure *A*,) *A* est mesurée par un nombre *V* dont l'unité *u* est z prise un nombre de fois & qui est tel que *T* est semblable à *u* & que *V* est semblable à *t*.

La grandeur *A* etant mesurée par le nombre *T* dont l'unité *t* est z prise un nombre de fois, supposons 1°. que *A* soit epuisée par les coordonnées *E I* &c. toutes mesurées par *t* & que *t* soit epuisée par des coordonnées que z mesure. *E* est epuisée par les coordonnées *FG* &c. toutes mesurées par z, *I* est aussi epuisée par les coordonnées *K L* &c. toutes mesurées par z, &c. Or les coordonnées *FK* &c. epuisent un Tout *B* *par Theor.* 28. & pour chacune des coordonnées *E I* &c. qui epuisent *A* on exprime une des coordonnées *FK* &c. qui epuisent *B* & reciproquement. • *B* est partie de *A* *par Theor.* 27 & 26. & z est l'unité d'un nombre *u* qui mesure *B* *par Theor.* 61. *T* qui mesure *A* est epuisé par des coordonnées toutes mesurées par *t* & dont l'une

mesure *E*, l'autre mesure *I* &c. *u* est aussi epuisé par des coordonnées toutes mesurées par z & dont l'une mesure *F* l'autre mesure *K* &c. *T* est donc semblable à *u*.

Par la même raison les coordonnées *GL* &c. epuisent un Tout *C* qui est partie de *A* & *u* mesure *C* *par Theor.* 77. *Cor.* *A* est donc epuisée par les coordonnées *B C* &c. toutes mesurées par *u* & telles que pour chacune des coordonnées *FG* &c. qui epuisent *E* on exprime une des coordonnées *B C* &c. qui epuisent *A* & reciproquement. *A* est donc mesurée par un nombre *V* dont *u* est l'unité *par Theor.* 61. & *V* est epuisé par des coordonnées toutes mesurées par *u* & telles que l'une mesure *B*, l'autre mesure *C* &c. *t* qui mesure *E* est aussi epuisé par des coordonnées toutes mesurées par z & telles que l'une mesure *F*, l'autre mesure *G* &c. *V* est donc semblable à *t*.

2°. Si *t* mesure *A* & que *A* soit epuisée par les coordonnées *E I* &c. toutes mesurées par z, le Theoreme est encore vrai. Car z etant l'unité d'un nombre *u* qui mesure chacune des coordonnées *E I* &c. *A* est mesurée par un nombre *V* dont *u* est l'unité *par Theor.* 61. Or *T* est semblable à *u* & *V* est semblable à *t* *par Theor.* 76.

3°. Si *A* est epuisée par des coordonnées *EI* &c. toutes mesurées par *t* & par z, *A* est mesurée par une espece *u* dont z est l'unité *par Theor.*

Theor. 61. & *u* eſt l'unité d'un nombre *V* qui meſure *A*. Or *T* eſt ſemblable à *u par Theor. 76.* & *V* eſt ſemblable à *t*.

4°. Si *A* eſt meſurée par *t* & par *z*, *z* eſt l'unité d'un nombre *u* qui meſure *A* & qui eſt l'unité d'un nombre *V* qui meſure *A*. Or *T* eſt ſemblable à *u* & *V* eſt ſemblable à *t*.

THEOREME LXXXVI.

Si des nombres ſemblables ſont multipliés par des nombres ſemblables, les produits ſeront ſemblables. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité & par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit *u* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *E* meſurée par un nombre *Z* dont *z* ſoit l'unité & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit *z* priſe un nombre de fois. Si *t* eſt eſt ſemblable à *y* & que *T* ſoit ſemblable à *Y*, *V* eſt ſemblable à *Z*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois & la grandeur *E* etant meſurée par le nombre *Z* dont *z* eſt l'unité & par le nombre *Y* dont l'unité *y* eſt *z* priſe un nombre de fois, ſuppoſons 1°. que *t* meſure une partie de *T*. *T* etant ſemblable à *Y*, *y* meſure une partie de *Y*. *A* eſt epuiſée par des coordonnées *B C* &c. toutes meſurées par *t* & *E* eſt epuiſée par des coordonnées *F G* &c. toutes meſurées par *y* & telles que pour chacune des coordonnées *B C* &c. on exprime une des

coordonnées *FG* &c. & reciproquement. *t* etant semblable à *y*, *V* eſt donc ſemblable à *Z* *par Theor. 83.*

2°. Si *t* meſure *A* & que *u* meſure une partie de *t*, *y* meſure *E* & *z* meſure une partie de *y*. *A* eſt epuiſée par des coordonnées *BC* &c. toutes meſurées par *u* & *E* eſt epuiſée par des coordonnées *FG* &c. toutes meſurées par *z* & telles que pour chacune des coordonnées *BC* &c. on exprime une des coordonnées *FG* &c. & reciproquement. *V* eſt donc ſemblable à *Z* *par Theor. 76 & 75.*

3°. Si *t* & *u* meſurent *A*, *y* & *z* meſurent *E*, d'où il ſuit encore que *V* eſt ſemblable à *Z*.

THEOREME LXXXVII.

Le produit d'un nombre multiplié par un autre qui eſt l'unité d'une grandeur eſt une unité de cette grandeur. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité & par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit *u* priſe un nombre de fois. Si *T* eſt une unité de la grandeur *E*, *V* eſt une unité de *E*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois, ſoit *F* une grandeur meſurée par *T*. *F* eſt meſurée par un nombre *X* dont *u* eſt l'unité *par Theor. 72.* *X* eſt ſemblable à *V* *par Theor. 86.* d'où il ſuit *par Theor. 77. Cor.* que *V* meſure *F*.

Or

Or puisque toute grandeur meſurée par *T* eſt meſurée par *V*, ſi *T* qui eſt une unité de la grandeur *E* meſure *E*, *V* meſure *E* & ainſi *V* eſt une unité de *E* & ſi *T* meſure des coordonnées qui epuiſent *E*, toutes ces coordonnées etant meſurées par *V*, il eſt encore vrai que *V* eſt une unité de *E*.

THEOREME LXXXVIII.

Les diviſeurs ſemblables donnent à des nombres ſemblables des quotiens ſemblables. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité & par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit *u* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *E* meſurée par un nombre *Z* dont z ſoit l'unité & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit z priſe un nombre de fois. Si *V* eſt ſemblable à *Z* & que *t* ſoit ſemblable à *y*, *T* eſt ſemblable à *Y*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois, ſuppoſons 1°. que *t* meſure une partie de *A*. La grandeur *E* etant meſurée par le nombre *Z* dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *V*, une partie de *E* eſt donc meſurée par un nombre *x* dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *t* *par Theor.* 82. & puiſque *E* eſt meſurée par le nombre *Y* dont l'unité *y* qui eſt z priſe un nombre de fois eſt ſemblable à *t*, *x* eſt ſemblable à *y* *par Theor.* 75. d'où il ſuit *par Theor.* 77. *Cor.* que *x* eſt *y*.

 Si

Si donc *T* eſt *t* priſe deux fois, *A* eſt epuiſée par les coordonnées *B C* meſurées par *t*. *E* eſt auſſi epuiſée par les coordonnées *FG* telles que *y* meſure *F*. *E* etant meſurée par *Z* & *F* par *y*, il s'enſuit donc *par Theor.* 71. 84 & 77. *Cor.* que *y* meſure *G*. *Y* eſt donc *y* priſe deux fois.

Si un nombre qui eſt *t* priſe deux fois meſure une partie de *A*, *Y* n'eſt donc pas *y* priſe deux fois & *y* meſurant une partie de *E*, un nombre qui eſt *y* priſe deux fois meſure une partie de *E*. Par conſequent ſi *T* eſt *t* priſe trois fois, *A* etant epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt meſurée par un nombre qui eſt *t* priſe deux fois & l'autre eſt meſurée par *t*, on prouvera que *E* eſt auſſi epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt meſurée par *y* priſe deux fois & l'autre eſt meſurée par *y*. *Y* eſt donc *y* priſe trois fois.

Si donc *T* eſt epuiſée par des coordonnées que *t* meſure, on trouvera toujours que *T* eſt ſemblable à *Y*.

2°. Suppoſé que *t* meſure *A*, ce que l'on vient de prouver fait voir que *y* ne meſure pas une partie de *E*, *y* meſure donc *E* & par conſequent *T* eſt ſemblable à *Y par Theor.* 76 & 75.

COROLLAIRE I.

A eſt meſurée par un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *u* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *S* eſt ſemblable a *t* & que *ſ* eſt ſemblable à *T* *par Theor.* 85. *E* eſt auſſi meſurée par un nombre

bre *X* dont l'unité *x* eſt z priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *X* eſt ſemblable à *y* & que *x* eſt ſemblable à *Y*. Si donc *T* eſt ſemblable à *Y*, *ſ* eſt ſemblable à *x par Theor. 75.* d'où il ſuit que *S* eſt ſemblable à *X* & que *t* eſt ſemblable à *y*. Les diviſeurs ſont ſemblables s'ils donnent à des nombres ſemblables des quotiens ſemblables.

COROLLAIRE II.

On voit auſſi par la demonſtration de ce Theoreme qu'il ſuffit que *V* & *T* meſurent *A* & que *Z* qui eſt ſemblable à *V* meſure *E* pour que *t* ſoit ſemblable à un nombre *y* dont z eſt l'unité & qui eſt une unité de *E*. Tout diviſeur d'un nombre eſt ſemblable à un diviſeur d'un autre nombre ſi ces deux nombres ſont ſemblables.

THEOREME LXXXIX.

Le quotient d'un nombre qui eſt l'unité d'une grandeur eſt une unité de cette grandeur. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité & par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit *u* priſe un nombre de fois. Si *V* eſt une unité de la grandeur *E*, *T* eſt une unité de *E*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois, ſoit *F* une grandeur meſurée par *V*. *t* eſt une unité de *F par Theor. 88. Cor. 2 & 77. Cor.* *t* eſt donc l'unité d'un nombre qui meſure *F* & qui eſt ſemblable à *T par Theor. 88.* d'où il ſuit que *T* meſure *F*.

Or

Or puisque toute grandeur mesurée par *V* est mesurée par *T*, si *V* qui est une unité de la grandeur *E* mesure *E*, *T* mesure *E* & ainsi *T* est une unité de *E* & si *V* mesure des coordonnées qui epuisent *E*, toutes ces coordonnées etant mesurées par *T*, il est encore vrai que *T* est une unité de *E*.

THEOREME XC.

Le divisseur de plusieurs nombres & de leur somme lui donne un quotient semblable à la somme des nombres qui ont l'unité des premiers & qui sont semblables à leurs quotiens. Soit la grandeur *A* epuisée par les coordonnées *B C D*. Soit *o* l'unité des nombres *O P Q R* tels que *O* mesure *A*, que *P* mesure *B*, que *Q* mesure *C* & que *R* mesure *D*. Soit z l'unité des nombres *t u x y* tels que *t* soit semblable à *O*, que *u* soit semblable à *P*, que *x* soit semblable à *Q* & que *y* soit semblable à *R*. Si *o* est z prise un nombre de fois, *t* mesure une grandeur epuisée par des coordonnées dont l'une est mesurée par *u*, l'autre par *x* & l'autre par *y*.

La grandeur *A* etant epuisée par les coordonnées *BCD* & *o* qui est z prise un nombre de fois etant l'unité des nombres *O P Q R* tels que *O* mesure *A*, que *P* mesure *R*, que *Q* mesure *C* & que *R* mesure *D*, *A* est mesurée par un nombre dont l'unité qui est z prise un nombre de fois est semblable à *O* *par Theor. 85.* Or z etant l'unité des nombres *t u x y* tels que *t* est semblable à *O*, que *u* est semblable à *P*,

que

que *x* eſt ſemblable à *Q* & que *y* eſt ſemblable à *R*, il s'enſuit *par Theor. 75 & 77. Cor.* que *t* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A*. Par la même raiſon *u* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B*, *x* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & *y* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *D*.

Or puisque *u* meſure *B* ou une partie de *B*, que *x* meſure *C* ou une partie de *C* &c. il s'enſuit que pluſieurs coordonnées de *A* ſont meſurées l'une par *u*, l'autre par *x* & l'autre par *y*. Ces coordonnées epuiſent un Tout *par Theor. 28.* Ce Tout etant *A* ou partie de *A par Theor. 15.* eſt une grandeur *par Theor. 49.* Or cette grandeur eſt meſurée par un nombre dont z eſt l'unité *par Theor. 70.* & puisque *u* eſt ſemblable à *P*, que *x* eſt ſemblable à *Q* &c. ce nombre *par Theor. 83.* eſt ſemblable à *O* & à *t*. Donc *par Theor. 77. Cor. t* meſure une grandeur epuiſée par des coordonnées dont l'une eſt meſurée par *u*, l'autre par *x* & l'autre par *y*.

THEOREME XCI.

Si le diviſeur & le quotient qu'il donne à un nombre ſont diviſés, un diviſeur & un quotient qu'il donne à ce même nombre ſont auſſi diviſés tellement que le diviſeur du ſecond diviſeur eſt le diviſeur du premier diviſeur, que le quotient du ſecond diviſeur eſt ſemblable au diviſeur du premier quotient, que le diviſeur du ſecond quotient eſt ſemblable au quotient du premier diviſeur & que le quotient du ſecond quotient eſt ſemblable au quotient

tient du premier quotient. Soit la grandeur *A* mesurée par un nombre *S* dont l'unité *ſ* soit *t* priſe un nombre de fois. Si *x* qui eſt *y* priſe un nombre de fois eſt l'unité de *t*, un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois eſt tel que *u* eſt ſemblable à *ſ*, que *V* eſt ſemblable à *t* & que *V* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *S*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois, ſoit *B* une grandeur meſurée par *ſ*. *x* qui eſt *y* priſe un nombre de fois, etant l'unité de *t*, *B* eſt meſurée par un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *u* eſt ſemblable à *ſ* & que *V* eſt ſemblable à *t* *par Theor. 85.* *B* eſt meſurée par un nombre *X* dont *x* eſt l'unité *par Theor. 72.* *ſ* etant une unité de *A*, *X* eſt une unité de *A* *par Theor. 87.* Donc *V* eſt une unité de *A* *par Theor. 89.* Or puiſque *V* meſure *B* qui eſt meſurée par *ſ*, il s'enſuit *par Theor. 76.* que le nombre qui meſure *A* & dont *V* eſt l'unité eſt ſemblable à *S*.

THEOREME XCII.

La grandeur epuiſée par des coordonnées que meſurent des nombres ſemblables eſt meſurée par un nombre ſemblable à ceux là. Soit la grandeur *A* epuiſée par les coordonnées *E I O* telles que *x* ſoit l'unité d'un nombre *X* qui meſure *E*, que *y* ſoit l'unité d'un nombre *Y* qui meſure *I* & que *z* ſoit l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *O*. Si *X Y Z* ſont ſemblables, *A* eſt meſurée par un nombre ſemblable à ceux là.

La

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *E I O* telles que le nombre *X* dont *x* eſt l'unité meſure *E*, que le nombre *Y* dont *y* eſt l'unité meſure *I* & que le nombre *Z* dont *z* eſt l'unité meſure *O*, ſi *x* meſure *E*, *X* etant ſemblable à *Y* & à *Z*, *y* meſure *I*, *z* meſure *O* & toute meſure de *A* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *X*.

Suppoſé que *E* ſoit epuiſée par les coordonnées *F G* &c. toutes meſurées par *x*. *X Y Z* etant ſemblables, *I* eſt epuiſée par les coordonnées *K L* &c. toutes meſurées par *y*, *O* eſt epuiſée par les coordonnées *P Q* &c. toutes meſurées par *z* & telles que pour chacune des coordonnées *FG* &c. on exprime une des coordonnées *K L* &c. & une des coordonnées *P Q* &c. & reciproquement. Les coordonnées *FKP* epuiſent un Tout *B* qui eſt partie de *A par Theor. 28. 27 & 26.* & les coordonnées *G L Q* epuiſent *C* partie de *A* &c. Or *F* etant egale à *G* & *K* etant egale à *L*, un Tout epuiſé par *F K* eſt egal à un Tout epuiſé par *G L par Theor. 54.* & par conſequent *P* etant egale à *Q*, *B* eſt egale à *C*.

A eſt donc epuiſée par les coordonnées *B C* &c. telles que pour chacune des coordonnées *FG* &c. on exprime une des coordonnées *B C* &c. & reciproquement. Une eſpece qui meſure les coordonnées *B C* &c. eſt donc l'unité d'un nombre qui meſure *A par Theor. 51. Cor. & 61.* & ce nombre eſt ſemblable à *X*.

COROL-

COROLLAIRE.

On voit auſſi par cette demonſtration que la grandeur meſurée par l'unité du nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable aux nombres *X Y Z* eſt epuiſée par des coordonnées dont l'une eſt egale à la grandeur meſurée par *x*, une autre eſt egale à la grandeur meſurée par *y* & l'autre eſt egale à la grandeur meſurée par *z*. Si une grandeur eſt epuiſée par des coordonnées que meſurent des nombres ſemblables, la grandeur meſurée par l'unité du nombre qui meſure cette grandeur & qui eſt ſemblable à ceux là, eſt epuiſée par des coordonnées egales aux grandeurs meſurées par les unitez de ces nombres.

THEOREME XCIII.

Si une grandeur etant epuiſée par deux coordonnées eſt meſurée par un nombre ſemblable à celui qui meſure l'une de ces coordonnées, l'autre eſt meſurée par un nombre ſemblable à ceux là. Soit la grandeur *A* epuiſée par les coordonnées *O S* telles que *u* ſoit l'unité d'un nombre *V* qui meſure *A* & que *x* ſoit l'unité d'un nombre *X* qui meſure *O*. Si *X* eſt ſemblable à *V*, *S* eſt meſurée par un nombre ſemblable à ceux là.

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *O S* & meſurée par le nombre *V* ſemblable au nombre *X* qui meſure *O*, ſi *u* l'unité de *V* meſure *A*, *x* l'unité de *X* meſure *O* & toute meſure de *S* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *S* & qui eſt ſemblable à *X*.

Suppo-

Supposé que *A* soit epuisée par les coordonnées *E I* &c. toutes mesurées par *u*. *O* est epuisée par les coordonnées *P Q* &c. toutes mesurées par *x* & telles que pour chacune des coordonnées *E I* &c. on exprime une des coordonnées *P Q* &c. & reciproquement. La grandeur mesurée par *u* est plus grande que la grandeur mesurée par *x* *par Theor. 80.* *E* est donc epuisée par les coordonnées *F G* telles que *P* est egale à *F*, *I* est epuisée par les coordonnées *KL* telles que *Q* est egale à *K*, &c. *E* etant egale à *I* & *F* etant egale à *K*, *G* est egale à *L* *par Theor. 55.*

Il est donc evident que *A* est epuisée par les coordonnées *BC* telles que *B* est epuisée par les coordonnées egales *FK* &c. & que *C* est epuisée par les coordonnées egales *G L* &c. *B* est donc mesurée par un nombre qui est semblable à *X* & dont l'unité mesure une grandeur egale à celle que *x* mesure. *C* est aussi mesurée par un nombre *Y* qui est semblable à *X*. *B* est donc egale à *O* *par Theor.* 77. d'où il suit *par Theor. 55.* que *C* est egale à *S*. *Y* mesure donc *S* *par Theor. 67.*

THEOREME XCIV.

Si des coordonnées epuisent une grandeur mesurée par l'unité d'un nombre qui mesure une autre grandeur, celle ci est epuisée par des coordonnées que mesurent des nombres semblables à celui là & dont les unitez mesurent ces coordonnées de la premiere grandeur. Soit *A* une grandeur mesurée par un nombre *V* dont *u* soit l'unité. Soit *I*

I une

une grandeur epuiſée par les coordonnées *L M N*. Si *u* meſure *I*, *A* eſt epuiſée par les coordonnées *C D E*, telles que *C* eſt meſurée par un nombre dont l'unité meſure *L*, que *D* eſt meſurée par un nombre dont l'unité meſure *M*, que *E* eſt meſurée par un nombre dont l'unité meſure *N* & que ces nombres ſont ſemblables à *V*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont l'unité *u* meſure la grandeur *I* & *I* etant epuiſée par les coordonnées *L M N*, il eſt evident que ſi *u* meſure *A*, *A* eſt egale à *I*, d'où il ſuit *par Theor. 52.* que *E* partie de *A* eſt egale à *N*. *A* eſt epuiſée par les coordonnées *B E par Theor. 17.* & *I* eſt epuiſée par les coordonnées *K N*. *B* eſt egale à *K par Theor. 55.* & *K* eſt epuiſée par *L M par Theor. 25.* *B* eſt donc epuiſée par les coordonnées *C D* telles que *C* eſt egale à *L* & que *D* eſt egale à *M*. Enfin toute eſpece qui meſure *C* & *L* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *V*. Par la même raiſon *D* eſt meſurée par un nombre dont l'unité meſure *M* & qui eſt ſemblable à *V* & *E* eſt meſurée par un nombre dont l'unité meſure *N* & qui eſt ſemblable à *V*.

Si *u* meſure une partie de *A*, ce que l'on vient de prouver fait voir que chaque partie de *A* que *u* meſure eſt epuiſée par des coordonnées dont l'une eſt egale à *L*, une autre eſt egale à *M* & l'autre eſt egale à *N*. Il eſt donc evident qu'un Tout *C* qui eſt partie de *A* eſt meſuré par un nombre qui eſt ſemblable à *V* & dont l'unité

nité *par Theor. 51. Cor.* meſure *L*, qu'un Tout *D* qui eſt partie de *A* eſt meſuré par un nombre qui eſt ſemblable à *V* & dont l'unité meſure *M* & qu'un Tout *E* qui eſt partie de *A* eſt meſuré par un nombre qui eſt ſemblable à *V* & dont l'unité meſure *N*. *C D E* ſont coordonnées *par Theor. 26.* Or le Tout que *C D E* epuiſent *par Theor. 28.* eſt meſuré par un nombre qui eſt ſemblable à *V par Theor. 92.* & dont l'unité *par Theor. 92. Cor.* meſure une grandeur epuiſée par des coordonnées dont l'une eſt egale à *L*, une autre eſt egale à *M* & l'autre eſt egale à *N*, d'où il ſuit que cette grandeur eſt egale à la grandeur meſurée par *u*. Ce Tout que *C D E* epuiſent n'eſt donc pas une partie de *A par Theor. 77.* d'où il ſuit *par Theor. 15.* que ce Tout eſt le même que *A*.

DEFINITION IX.

Deux nombres ſont *premiers entre eux*, s'ils n'ont point de diviſeurs ſemblables qui ſoient epuiſés par des coordonnées que leurs unitez meſurent. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité. Soit la grandeur *B* meſurée par un nombre *Z* dont z ſoit l'unité. Si *A* & *B* n'ont pas chacune une unité telle que *t* unité de *A* etant *u* priſe un nombre de fois & *y* unité de *B* etant z priſe un nombre de fois, *t* ſoit ſemblable à *y* & epuiſée par des coordonnées que *u* meſure, *V* & *Z* ſont des nombres premiers entre eux.

THEOREME XCV.

Les nombres qui ne ſont pas premiers entre eux ont des diviſeurs ſemblables qui leur donnent des quotiens premiers entre eux. Soit ſ l'unité d'un nombre *S* qui meſure la grandeur *A*. Soit z l'unité d'un nombre *Z* qui meſure la grandeur *B*. Si *S Z* ne ſont pas premiers entre eux, un nombre *P* dont l'unité *p* eſt ſ priſe un nombre de fois & un nombre *X* dont l'unité *x* eſt z priſe un nombre de fois ſont tels que *P* meſure *A*, que *X* meſure *B*, que *p* eſt ſemblable à *x* & que *P X* ſont premiers entre eux.

Puiſque le nombre *S* qui meſure la grandeur *A* & dont ſ eſt l'unité & le nombre *Z* qui meſure la grandeur *B* & dont z eſt l'unité ne ſont pas premiers entre eux, une eſpece *r* qui eſt une unité de *A* & qui eſt ſ priſe un nombre de fois & une eſpece *y* qui eſt une unité de *B* & qui eſt z priſe un nombre de fois ſont telles que *r* eſt ſemblable à *y* & que *r* eſt epuiſée par des coordonnées que ſ meſure.

Suppoſé que *A* ait pluſieurs unitez dont chacune etant ſ priſe un nombre de fois ſoit ſemblable à une eſpece qui etant une unité de *B* ſoit z priſe un nombre de fois. Il eſt evident *par Theor. 61. Cor. 1.* que *p* l'une de ces unitez de *A* eſt telle que toutes celles qui ne ſont pas la même que *p* meſurent des parties de la grandeur que *p* meſure. *p* eſt donc ſemblable à *x* qui eſt une unité de *B* & qui eſt z priſe un nombre

de

de fois. *p* eſt l'unité d'un nombre *P* qui meſure *A* & *x* eſt l'unité d'un nombre *X* qui meſure *B*.

Suppoſé donc que *A* ait une unité *o* qui ſoit *p* priſe un nombre de fois. Suppoſé auſſi que *B* ait une unité *u* qui ſoit *x* priſe un nombre de fois & que *o* ſoit ſemblable à *u*. La grandeur que *o* meſure eſt meſurée par un nombre *n* dont *ſ* eſt l'unité *par Theor.* 72. & la grandeur meſurée par *u* eſt meſurée par un nombre *t* dont *z* eſt l'unité. *n* eſt une unité de *A par Theor.* 87. & *t* eſt une unité de *B*, *n* eſt ſemblable à *t par Theor.* 86. Or *n* meſurant la grandeur que *o* meſure, *n* ne meſure pas une partie de la grandeur que *p* meſure. *n* eſt donc le même que *p* & puiſque *p* meſure la grandeur que *o* meſure, *o* n'eſt pas epuiſée par des coordonnées que *p* meſure. Donc *P X* ſont premiers entre eux.

EXEMPLE. Les nombres 12*a* & 20*b* n'etant pas premiers entre eux, ont pour diviſeurs l'un 4*a* & l'autre 4*b* & comme ils n'ont pas des diviſeurs ſemblables qui ne ſoient les mêmes que ceux là ou qui ne meſurent une partie de la grandeur que ceux là meſurent, il s'enſuit qu'un nombre qui eſt trois fois 4*a* ou le quotient de 12*a* diviſé par 4*a* & un nombre qui eſt cinq fois 4*b* ou le quotient de 20*b* diviſé par 4*b* ſont premiers entre eux.

I 3 COROL-

COROLLAIRE.

P eſt une unité de *A* & *X* eſt une unité de *B*. Suppoſé donc que *P* ſoit ſemblable à *X*, *PX* etant premiers entre eux, *P* n'eſt pas epuiſée par des coordonnées que *p* meſure & par conſequent *p* meſure *A* & *x* meſure *B*. Les unitez des nombres ſemblables qui ſont premiers entre eux meſurent les grandeurs que ces nombres meſurent.

THEOREME XCVI.

Si de deux nombres qui ſont premiers entre eux l'un eſt ſemblable à un troiſieme, l'autre & le troiſieme ſont premiers entre eux. Soit *ſ* l'unité d'un nombre *S* qui meſure la grandeur *A*. Soit *x* l'unité d'un nombre *X* qui meſure la grandeur *B*. Soit *z* l'unité d'un nombre *Z* qui meſure la grandeur *C*. Si *XZ* ſont premiers entre eux & que *S* ſoit ſemblable à *X*, *SZ* ſont premiers entre eux.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *S* dont *ſ* eſt l'unité, ſuppoſons une eſpece *q* qui ſoit une unité de *A* & qui etant *ſ* priſe un nombre de fois ſoit epuiſée par des coordonnées que *ſ* meſure. *x* etant l'unité du nombre *X* qui meſure la grandeur *B* & qui eſt ſemblable à *S*, une eſpece *t* qui eſt une unité de *B* & qui eſt *x* priſe un nombre de fois eſt ſemblable à *q* *par Theor. 88. Cor. 2.* *t* eſt donc auſſi epuiſée par des coordonnées que *x* meſure.

Or

Or z etant l'unité du nombre *Z* qui meſure la grandeur *C* & *XZ* etant premiers entre eux, *C* n'a point d'unité qui etant z priſe un nombre de fois ſoit ſemblable à *t*. *C* n'a donc point d'unité qui etant z priſe un nombre de fois ſoit ſemblable à *q* à un nombre qui ayant l'unité *ſ* & etant une unité de *A* ſoit epuiſé par des coordonnées que *ſ* meſure. Donc *SZ* ſont premiers entre eux.

COROLLAIRE.

La grandeur meſurée par *x* eſt meſurée par un nombre *u* dont *x* eſt l'unité & *u* eſt l'unité d'un nombre *V* qui meſure *B*. La grandeur meſurée par z eſt auſſi meſurée par un nombre *y* dont z eſt l'unité & *y* eſt l'unité d'un nombre *Y* qui meſure *C*. *V* eſt ſemblable à *X par Theor. 76.* & *Y* eſt ſemblable à *Z*. *XZ* etant premiers entre eux, *VY* ſont donc premiers entre eux & puisque *u* eſt ſemblable à *y*, il paroit par ce Theoreme & par le precedent que deux nombres quelconques ont des diviſeurs ſemblables qui leur donnent des quotiens premiers entre eux.

THEOREME XCVII.

Les diviſeurs ſemblables qui donnent à des nombres qui ne ſont pas premiers entre eux des quotiens premiers entre eux ſont epuiſés par des coordonnées que leurs unitez meſurent. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité & par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit *u* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur

B mesurée par un nombre *Z* dont *z* soit l'unité & par un nombre *Y* dont l'unité *y* soit *z* prise un nombre de fois. Si *VZ* n'etant pas premiers entre eux *T Y* sont premiers entre eux & que *t* soit semblable à *y*, *t* est epuisée par des coordonnées que *u* mesure.

Le nombre *V* qui mesure la grandeur *A* & le nombre *Z* qui mesure la grandeur *B* n'etant pas premiers entre eux, si l'unité d'un nombre qui mesure *A* mesure une grandeur mesurée par *u* unité de *V*, ce nombre etant semblable à *V* *par Theor. 76.* il s'ensuit *par Theor. 96.* que ce nombre & *Z* ne sont pas premiers entre eux. Donc par la même raison le nombre qui mesure *A* & dont l'unité mesure une grandeur mesurée par *u* & le nombre qui mesure *B* & dont l'unité mesure une grandeur mesurée par *z* unité de *Z* ne sont pas premiers entre eux.

Or le nombre *T* qui mesure *A* & le nombre *Y* qui mesure *B* sont premiers entre eux. Donc *t* unité de *T* & *y* unité de *Y* ne sont pas telles que *t* mesure une grandeur mesurée par *u* & que *y* mesure une grandeur mesurée par *z*. *t* qui est *u* prise un nombre de fois ou *y* qui est *z* prise un nombre de fois est donc epuisée par des coordonnées que son unité mesure & *t* etant semblable à *y*, il s'ensuit que *t* est epuisée par des coordonnées que *u* mesure.

THEOREME XCVIII.

Tout diviseur d'un nombre & un autre nombre sont premiers entre eux si ces deux nombres sont

ſont premiers entre eux. Soit *u* l'unité d'un nombre *V* qui meſure la grandeur *A* & d'un nombre *t* qui ſoit une unité de *A*. Soit z l'unité d'un nombre Z qui meſure la grandeur *B*. Si *V Z* ſont premiers entre eux, *t* Z ſont premiers entre eux.

u etant l'unite du nombre *V* qui meſure la grandeur *A* & du nombre *t* qui eſt une unité de *A* & z etant l'unité du nombre Z qui meſure la grandeur *B*, ſuppoſons que *B* ait une unité *y* qui ſoit z priſe un nombre de fois & qui ſoit epuiſée par des coordonnées que z meſure. *V*Z etant premiers entre eux, *A* n'a point d'unité qui ſoit *u* priſe un nombre de fois & qui ſoit ſemblable à *y*. Or tout nombre dont l'unité eſt *u* priſe un nombre de fois & qui meſure une grandeur meſurée par *t* eſt une unité de *A* *par Theor. 89*. d'où il ſuit *par Theor. 72.* que l'unité de ce nombre eſt auſſi une unité de *A*. La grandeur meſurée par *t* n'a donc point d'unité qui etant *u* priſe un nombre de fois ſoit ſemblable à *y* à un nombre qui ſoit une unité de *B* & qui etant z priſe un nombre de fois ſoit epuiſé par des coordonnées que z mſeure. Dont *t* Z ſont premiers entre eux.

COROLLAIRE.

Si donc *V* & *t* ſont premiers entre eux, *t* & *t* ſont premiers entre eux, d'où il ſuit *par Theor. 95. Cor.* que *u* meſure la grandeur meſurée par *t*. Si un nombre & ſon diviſeur ſont premiers entre eux, l'unité de ce nombre meſure la grandeur meſurée par ce diviſeur.

THEOREME XCIX.

Si les unitez de deux nombres qui sont premiers entre eux sont des unitez d'une même partie de la grandeur que l'un de ces nombres mesure, les grandeurs mesurées par ces nombres sont inegales. Soit *u* l'unité d'un nombre *V* qui mesure la grandeur *A*. Soit z l'unité d'un nombre *Z* qui mesure la grandeur *O*. Soit *E* une partie de *A*. Si *u* & z sont des unitez de *E* & que *VZ* soient premiers entre eux, les grandeurs *AO* sont inegales.

Puisque *u* & z sont des unitez de *E* partie de la grandeur *A*, il s'ensuit que *u* & z sont des unitez de *F* la moindre des parties de *A* qui ait ces unitez. Supposons donc un nombre dont l'unité soit z & qui mesure une grandeur egale à *A*. z qui mesure une partie de *A* ne mesure pas la grandeur que ce nombre mesure & par consequent ce nombre mesure *A par Theor. 67.*

A est epuisée par les coordonnées *B D* qui sont telles que *B* est ou egale à *F* ou epuisée par des coordonnées toutes egales à *F* & que *D* n'est pas plus grande que *F par Theor. 59.* Si donc *u* mesure *F*, *u* est une unité de *B par Theor. 69.* & si *F* est mesurée par un nombre qu'epuisent des coordonnées mesurées par *u*, ce nombre *par Theor. 67.* est une unité de *B*, d'où il suit *par Theor. 72.* que *u* est une unité de *B*. Par la même raison z est une unité de *B*. *u* & z sont donc aussi des unitez de *D par Theor. 71.* *D* n'est

n'eſt donc pas moindre que *F*, d'où il ſuit que *A* eſt epuiſée par des coordonnées toutes egales à *F*.

Toutes ces coordonnées ſont donc meſurées par un nombre *t* dont *u* eſt l'unité & par un nombre *y* dont z eſt l'unité *par Theor. 61. Cor. 1.* *A* eſt donc meſurée par un nombre *T* dont *t* eſt l'unité & par un nombre *Y* dont *y* eſt l' unité *par Theor. 61.* & *T* eſt ſemblable à *Y par Theor. 76.* *A* eſt auſſi meſurée par un nombre dont l'unité *ſ* etant *u* priſe un nombre de fois eſt ſemblable à *T* & par un nombre dont l'unité *x* etant z priſe un nombre de fois eſt ſemblable à *Y par Theor. 85.* *ſ* eſt donc ſemblable à *x* & comme *t* meſurant une partie de *A* meſure des coordonnées qui epuiſent *T*, *u* meſure auſſi des coordonnées qui epuiſent *ſ*.

Le nombre *V* qui meſure *A* & dont *u* eſt l'unité & un nombre dont z eſt l'unité & qui meſure une grandeur egale à *A* ne ſont donc pas premiers entre eux. Or *V* & le nombre *Z* dont z eſt l'unité ſont premiers entre eux. *A* n'eſt donc pas egale à la grandeur *O* que *Z* meſure.

z meſurant une partie de *A*, ſi z meſure *O*, *A* eſt plus grande que *O* & ſi z meſure une partie de *O*, *A* & *O* n'etant pas egales ſont inegales *par Theor. 63.*

THEOREME C.

Si deux diviſeurs d'un nombre ſont premiers entre eux & lui donnent des quotient premiers entre

entre eux, chaque diviſeur eſt ſemblable au quotient que l'autre diviſeur donne à ce nombre. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont l'unité *u* ſoit z priſe un nombre de fois & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit auſſi z priſe un nombre de fois. Si *u y* ſont premiers entre eux & que *V Y* ſoient auſſi premiers entre eux, *V* eſt ſemblable à *y* & *u* eſt ſemblable à *Y*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont l'unité *u* eſt z priſe un nombre de fois, *A* eſt meſurée par un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt z priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *ſ* eſt ſemblable à *V* & que *S* eſt ſemblable à *u* *par Theor. 85.*

Soit donc *A* meſurée par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit z priſe un nombre fois & qui ſoit tel que *ſ* meſure une grandeur plus grande que celle que *t* meſure. *B* partie de *A* eſt meſurée par un nombre dont *t* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *S par Theor. 81.* & par conſequent à *u*. Un nombre dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *u* eſt donc une unité de *B par Theor. 85. u* eſt donc une unité de *B par Theor. 77. Cor.* & puiſque *t* & *u* ſont des unitez de *B*, *V* & *T* qui meſurent *A* ne ſont pas premiers entre eux *par Theor. 99.*

Or *V* & *Y* ſont premiers entre eux. *Y* n'eſt donc pas *T* un nombre qui meſure *A* & dont l'unité qui eſt z priſe un nombre de fois meſure une grandeur moindre que celle qui eſt meſurée par *ſ*. Mais *Y* meſure *A* & *y* unité

de

de *V* eſt z priſe un nombre de fois. *y* ne meſure donc pas une grandeur moindre que celle qui eſt meſurée par *ſ*.

A eſt auſſi meſurée par le nombre *X* dont l'unité *x* eſt z priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *x* eſt ſemblable à *Y* & que *X* eſt ſemblable à *y*. *u* & *y* etant premiers entre eux, *S* & *X* ſont premiers entre eux *par Theor. 96.* On prouvera donc auſſi que *ſ* ne meſure pas une grandeur moindre que celle que *y* meſure.

ſ & *y* meſurent donc des grandeurs egales. *ſ* eſt donc ſemblable à *y* & le même que *y par Theor. 76 & 77. Cor.* *V* eſt donc ſemblable à *y* & *S* etant *par Theor. 76.* ſemblable à *Y*, *u* eſt ſemblable à *Y*.

THEOREME CI.

Les quotiens qui ne ſont pas premiers entre eux & que donnent à un nombre des diviſeurs premiers entre eux ſont diviſés par des nombres ſemblables qui leur donnent des quotiens dont le premier eſt ſemblable au ſecond de ces diviſeurs & le ſecond au premier de ces diviſeurs. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit z priſe un nombre de fois & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit auſſi z priſe un nombre de fois. Si *t y* ſont premiers entre eux & que *T Y* ne ſoient pas premiers entre eux, un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois & un nombre *X* dont l'unité *x* eſt *y* priſe de fois meſurent *A* & ſont tels que *S* eſt ſemblable à *y* & *X* ſemblable à *t*.

Le

Le nombre *T* dont l'unité *t* eſt z priſe un nombre de fois & le nombre *Y* dont l'unité *y* eſt z priſe un nombre de fois meſurant la grandeur *A* & n'etant pas premiers entre eux, un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois & un nombre *X* dont l'unité *x* eſt *y* priſe un nombre de fois meſurent *A*, ſont premiers entre eux & tels que *ſ* eſt ſemblable à *x par Theor. 95.* *A* eſt donc meſurée par un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *t* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *R* eſt ſemblable à *ſ* & que *S* eſt ſemblable à *r par Theor. 85.* *A* eſt auſſi meſurée par un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *y* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *V* eſt ſemblable à *x* & que *X* eſt ſemblable à *u*. *S X* etant premiers entre eux, *r u* ſont donc premiers entre eux *par Theor. 96.*

Or *ſ* etant ſemblable à *x*, *R* eſt ſemblable à *V*. *r* & *u* meſurent donc des grandeurs egales *par Theor. 79.* & par conſequent ſoit que *r* meſure *A* ou une partie de *A*, *r* & *u* meſurent une même grandeur *par Theor. 69.* *t y* etant premiers entre eux, *r* eſt donc ſemblable à *y* & *u* eſt ſemblable à *t par Theor. 100.* *S* eſt donc ſemblable à *y* & *X* eſt ſemblable à *t*.

THEOREME CII.

Si les diviſeurs ſemblables de deux nombres leurs donnent des quotiens premiers entre eux & que deux autres diviſeurs ſemblables leur donnent auſſi des quotiens premiers entre eux, ces deux divi-

diviſeurs du premier nombre ſont le même & ces deux diviſeurs du ſecond nombre ſont auſſi le même. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *M* dont l'unité *m* ſoit *q* priſe un nombre de fois & par un nombre *P* dont l'unité *p* ſoit auſſi *q* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *B* meſurée par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit *z* priſe un nombre de fois & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit auſſi *z* priſe un nombre de fois. Si *m* etant ſemblable à *t*, *MT* ſont premiers entre eux & que *p* etant ſemblable à *y*, *P Y* ſoient premiers entre eux, *m* eſt le même que *p* & *t* eſt le même que *y*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *M* dont l'unité *m* eſt *q* priſe un nombre de fois & par le nombre *P* dont l'unité *p* eſt auſſi *q* priſe un nombre de fois & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt *z* priſe un nombre de fois & par le nombre *Y* dont l'unité *y* eſt auſſi *z* priſe un nombre de fois, on ſuppoſera que *m p* ſont premiers entre eux, d'où il ſuit *par Theor. 96.* que *t y* ſont premiers entre eux parceque *m* eſt ſemblable à *t* & que *p* eſt ſemblable à *y*. Cela etant:

Ou *M P* ſont premiers entre eux & *T Y* ſont auſſi premiers entre eux. *M* eſt donc ſemblable à *p* & *P* eſt ſemblable à *m par Theor. 100.* *T* eſt auſſi ſemblable à *y* & *Y* eſt ſemblable à *t*. *m* etant ſemblable à *t*, *P* eſt donc ſemblable à *Y* & *p* etant ſemblable à *y*, *M* eſt ſemblable à *T*. *M T* etant premiers entre eux, *m* meſure donc

A par

A par Theor. 95. Cor. & *P Y* etant premiers entre eux, *p* meſure *A*. *m* eſt donc ſemblable à *p par Theor. 76.*

Ou *M P* ſont premiers entre eux & *T Y* ne ſont pas premiers entre eux. *M* eſt encore ſemblable à *p* & *P* eſt ſemblable à *m*. Un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *t* priſe un nombre de fois & un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *y* priſe un nombre de fois meſurent *B* & ſont tels que *R* eſt ſemblable à *y* & que *V* eſt ſemblable à *t par Theor. 101.* *M* etant ſemblable à *p* & à *y* eſt donc ſemblable à *R* & *P* etant ſemblable à *m* & à *t* eſt ſemblable à *V*. Or *M T* etant premiers entre eux *MR* ſont premiers entre eux *par Theor. 85. 98 & 96.* & *P Y* etant premiers entre eux, *PV* ſont premiers entre eux. *m* & *p* meſurent donc *A* & par conſequent *m* eſt ſemblable à *p*.

Ou *MP* ni *T Y* ne ſont premiers entre eux. Un nombre *K* dont l'unité *k* eſt *m* priſe un nombre de fois & un nombre *N* dont l'unité *n* eſt *p* priſe un nombre de fois meſurent *A* & ſont tels que *k* eſt ſemblable à *n*, que *K* eſt ſemblable à *p* & que *N* eſt ſemblable à *m par Theor. 101.* Les nombres *R V* meſurent encore *B*. *R* etant ſemblable à *y* & à *p* eſt donc ſemblable à *K* & *V* etant ſemblable à *t* & à *m* eſt ſemblable à *N*. Or *M R* etant premiers entre eux, *KR* ſont premiers entre eux & *P V* etant premiers entre eux, *NV* ſont premiers entre eux. *k* & *n* meſurent donc *A*. *m* & *p* meſurent donc des grandeurs egales *par Theor. 79.* Donc *m* eſt ſemblable à *p par Theor. 76.*

Sup-

Supposé que *m p* ne soient pas premiers entre eux. Un nombre *l* dont l'unité est *q* prise un nombre de fois & un nombre *o* dont l'unité est aussi *q* prise un nombre de fois sont premiers entre eux & tels que l'unité de l'un est semblable à l'unité de l'autre, que *l* mesure la grandeur mesurée par *m* & *o* la grandeur mesurée par *p* *par Theor. 95.* *l* est l'unité d'un nombre *L* qui mesure *A par Theor. 89.* & *o* est l'unité d'un nombre *O* qui mesure aussi *A*. *m* etant semblable à *t*, la grandeur mesurée par *t* est donc mesurée par un nombre *ʃ* dont l'unité est z prise un nombre de fois & qui est semblable à *l par Theor. 88. Cor. 2 & 88.* & *p* etant semblable à *y*, la grandeur mesurée par *y* est aussi mesurée par une nombre *x* dont l'unité est z prise un nombre de fois & qui est semblable à *o*. *ʃ* est l'unité d'un nombre *S* qui mesure *B* & *x* est aussi l'unité d'un nombre *X* qui mesure *B*. *L* est semblable à *M par Theor. 76.* & par la même raison *O* est semblable à *P*, *S* est semblable à *T* & *X* est semblable à *Y*. *M T* etant premiers entre eux, *L S* sont donc premiers entre eux & *P Y* etant premiers entre eux, *O X* sont premiers entre eux. L'unité de *l* est l'unité de *o par Theor. 77. Cor.* & l'unité de *ʃ* est l'unité de *x*. On prouvera donc que *l* est semblable à *o* d'où il suit *par Theor. 86.* que *m* est semblable à *p*.

Or puisque *m* est semblable à *p*, *t* est semblable à *y* & *par Theor. 77. Cor.* *m* est le même que *p* & *t* est le même que *y*.

THEOREME CIII.

Les diviſeurs ſemblables qui donnent à deux nombres des quotiens premiers entre eux ſont diviſés par tous les diviſeurs ſemblables de ces deux nombres. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *O* dont l'unité *o* ſoit *ſ* priſe un nombre de fois & par un nombre *R* dont l'unité *r* ſoit auſſi *ſ* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *B* meſurée par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit z priſe un nombre de fois & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit auſſi z priſe un nombre de fois. Si *O T* ſont premiers entre eux & que *o* ſoit ſemblable à *t* & *r* ſemblable à *y*, *r* eſt une unité de la grandeur meſurée par *o* & *y* eſt une unité de la grandeur meſurée par *t*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *O* dont l'unité *o* eſt *ſ* priſe un nombre de fois & par le nombre *R* dont l'unité *r* eſt auſſi *ſ* priſe un nombre de fois & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt z priſe un nombre de fois & par le nombre *Y* dont l'unité *y* eſt auſſi z priſe un nombre de fois, ſuppoſons que *R Y* ſoient premiers entre eux. Puiſque *O T* ſont premiers entre eux, que *o* eſt ſemblable à *t* & que *r* eſt ſemblable à *y*, *r* eſt donc le même que *o* & *y* eſt le même que *t* *par Theor. 102.* La grandeur meſurée par *o* etant donc meſurée par *r*, *r* eſt une unité de la grandeur meſurée par *o* & par la même raiſon *y* eſt une unité de la grandeur meſurée par *t*.

Suppo-

Suppoſé que *R Y* ne ſoient pas premiers entre eux. Un nombre *P* dont l'unité *p* eſt *r* priſe un nombre de fois, & un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *y* priſe un nombre de fois ſont tels que *P* meſure *A*, que *V* meſure *B*, que *p* eſt ſemblable à *u* & que *P V* ſont premiers entre eux *par Theor. 95.* La grandeur meſurée par *p* eſt meſurée par un nombre *q* dont *ſ* eſt l'unité *par Theor.* 72. & la grandeur meſurée par *u* eſt meſurée par un nombre *x* dont z eſt l'unité. *q* eſt ſemblable à *x* *par Theor. 86.* *q* eſt l'unité d'un nombre *Q* qui meſure *A* *par Theor. 87.* & *x* eſt l'unité d'un nombre *X* qui meſure *B*. *Q* eſt ſemblable à *P* *par Theor.76.* & *X* eſt ſemblable à *V*, d'où il ſuit *par Theor.96.* que *Q X* ſont premiers entre eux. *q* eſt donc le même que *o* & *x* eſt le même que *t* *par Theor. 102.* *q* etant donc une unité de la grandeur meſurée par *o*, *p* eſt une unité de cette grandeur *par Theor. 89.* d'où il ſuit *par Theor.* 72. que *r* eſt une unité de la grandeur meſurée par *o*. Par la même raiſon *y* eſt une unité de la grandeur meſurée par *t*.

THEOREME CIV.

Si la ſomme de deux nombres & un troiſieme ſont premiers entre eux & que l'un ait un diviſeur ſemblable au troiſieme, l'autre & le troiſieme ſont premiers entre eux. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *BC*. Soit *u* l'unité d'un nombre *Q* qui meſure *A*, d'un nombre *r* qui ſoit une unité de *B* & d'un nombre *V* qui

mesure *C*. Soit z l'unité d'un nombre *Z* qui mesure la grandeur *E*. Si *Q Z* sont premiers entre eux & que *r* soit semblable à *Z*, *VZ* sont premiers entre eux.

La grandeur *A* etant epuisée par les coordonnées *B C* & *u* etant l'unité du nombre *Q* qui mesure *A*, du nombre *r* qui est une unité de *B* & du nombre *V* qui mesure *C*, supposons que z soit l'unité d'un nombre *Y* qui mesure la grandeur *E* & qui soit tel que *r* etant semblable à *Y*, *VY* ne soient pas premiers entre eux. Un nombre *T* dont l'unité *t* est *u* prise un nombre de fois & un nombre *X* dont l'unité *x* est z prise un nombre de fois sont tels que *T* mesure *C*, que *X* mesure *E*, que *t* est semblable à *x* & que *T X* sont premiers entre eux *par Theor. 95.* d'où il suit *par Theor. 97.* que *x* est epuisée par des coordonnées que z mesure.

Or *r* etant semblable à *Y*, la grandeur mesurée par *r* a une unité *ſ* qui est *u* prise un nombre de fois & qui est semblable à *x par Theor. 88. Cor. 2.* & par consequent à *t*. *ſ* est donc le même que *t par Theor. 77. Cor.* *ſ* est donc une unité de *C* & *ſ* etant aussi *par Theor. 89 & 72.* une unité de *B*, *ſ* est une unité de *A par Theor. 70.* *x* unité de *E* etant epuisée par des coordonnées que z mesure, il paroit donc que *Q Y* ne sont pas premiers entre eux.

Q Z etant premiers entre eux, *Z* n'est donc pas *Y* un nombre qui mesurant *E* & ayant l'unité z, soit

z, ſoit tel que *r* ſoit ſemblable à ce nombre & que *V* & ce nombre ne ſoient pas premiers entre eux. Mais *Z* meſure *E*, z eſt l'unité de *Z* & *r* eſt ſemblable à *Z*. Donc *V Z* ſont premiers entre eux.

COROLLAIRE.

On prouvera de même que ſi *V Z* ſont premiers entre eux, *Q Z* ſont premiers entre eux. Car en ſuppoſant que *Q Y* ne ſoient pas premiers entre eux, *ſ* unité de *A* & de *B* eſt auſſi une unité de *C* *par Theor. 71.* La ſomme de deux nombres & un troiſieme ſont premiers entre eux ſi l'un a un diviſeur ſemblable au troiſieme & que l'autre & le troiſieme ſoient premiers entre eux.

THEOREME CV.

La grandeur meſurée par deux nombres qui ſont premiers entre eux eſt meſurée par un troiſieme nombre qui a deux diviſeurs dont l'un qui eſt ſemblable au premier nombre donne un quotient ſemblable au ſecond & l'autre qui eſt ſemblable au ſecond nombre donne un quotient ſemblable au premier. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *M* dont *m* ſoit l'unité & par un nombre *P* dont *ſ* ſoit l'unité. Si *M P* ſont premiers entre eux, deux nombres qui ont la même unité ſont tels que l'un qui eſt ſemblable à *M* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *P* & que l'autre qui eſt ſemblable à *P* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *M*.

La grandeur *A* etant mesurée par le nombre *M* dont *m* est l'unité & par le nombre *P* dont *ſ* est l'unité, ſuppoſons que *m* & *ſ* meſurent *A*. Il eſt evident que *M* qui eſt ſemblable à *M* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *P* & que *M* qui eſt ſemblable à *P* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *M*.

Suppoſé que *m* meſurant *A*, *ſ* meſure une partie de *A*. Un nombre dont *ſ* eſt l'unité & qui meſurant la grandeur meſurée par *ſ* eſt ſemblable à *M* eſt *par Theor. 61.* l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *P*. *P* qui eſt ſemblable à *P* eſt auſſi l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *M*.

Suppoſé que *m* & *ſ* meſurent des parties de *A*, *M P* etant premiers entre eux ne ſont donc pas des nombres ſemblables *par Theor. 95. Cor.* *m* & *ſ* ne meſurent donc pas des grandeurs egales *par Theor. 76.* & par conſequent *m* & *ſ* meſurent des grandeurs inegales *par Theor. 60. Cor.* Nous ſuppoſerons donc que *m* meſure une grandeur plus grande que celle que *ſ* meſure. Une partie de *A* eſt donc meſurée par un nombre *q* dont *ſ* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *M par Theor. 81.* *P q* etant donc premiers entre eux *par Theor. 96.* *q* n'eſt pas une unité de *A par Theor. 98. Cor.* *A* eſt donc epuiſée par les coordonnées *B C* telles que *B* eſt meſurée par le nombre *Q* dont *q* eſt l'unité & que *C* eſt moin-

dre

dre que la grandeur que *q* meſure *par Theor. 59.* *C* eſt meſurée par un nombre *S* dont *ſ* eſt l'unité *par Theor. 71.* & *S* n'etant pas le même que *q* meſure une partie de la grandeur que *q* meſure *par Theor. 61. Cor. 1.* Donc *par Theor. 82.* *G* une partie de *A* eſt meſurée par un nombre dont *m* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *S.* Or *B* etant meſurée par *Q* eſt meſurée *par Theor. 85.* par un nombre qui eſt ſemblable à *q* & à *M*, d'où il ſuit *par Theor. 93.* qu'un nombre *o* qui eſt ſemblable à *M* & dont nous appellerons l'unité *u* meſure *C*.

Si donc *m* meſure *G*, *ſ* meſure *C* & la grandeur meſurée par *ſ* eſt meſurée par *o* *par Theor. 67.* par un nombre ſemblable à *M*. Or il ſuit de là que *A* eſt meſurée par un nombre *O* dont *o* eſt l'unité *par Theor. 61.* & qui eſt ſemblable à *P* *par Theor. 76.* Donc *par Theor. 85.* *A* eſt meſurée par un nombre *N* dont *n* eſt l'unité & qui eſt tel que *N* eſt ſemblable à *o* & à *M* & que *n* eſt ſemblable à *O* & à *P*. La grandeur meſurée par *n* eſt donc egale à la grandeur meſurée par *m* *par Theor. 79.* d'où il ſuit *par Theor. 67.* que la grandeur meſurée par *m* eſt meſurée par *n* par un nombre ſemblable à *P*.

Si *m* meſure une partie de *G*, *ſ* meſure une partie de *C* & *C* etant meſurée par *S* & par *o* qui ſont tels que *o* eſt ſemblable a *M* & que *S* eſt ſemblable à un nombre dont *m* eſt l'unité & qui meſure *G* partie de *A*, il s'enſuit *par Theor. 82.* que *S* eſt ſemblable à un nombre dont *u*

 l'uni-

l'unité de *o* eſt l'unité & qui meſure une partie de *C*. *ſ* meſure donc une grandeur plus grande que celle que *u* meſure *par Theor. 80*. Or *P M* etant premiers entre eux & *q* qui eſt ſemblable à *M* etant une unité de *B*, *S M* ſont premiers entre eux *par Theor. 104*. & par conſequent *S a* ſont premiers entre eux *par Theor. 96*. *C* eſt donc epuiſée par les coordonnées *D E* telles que *D* eſt meſurée par un nombre *T* dont l'unité *t* qui eſt *u* priſe un nombre de fois eſt ſemblable à *S* & que *E* eſt meſurée par un nombre *V* dont *u* eſt l'unité & qui etant ſemblable à un nombre dont *ſ* eſt l'unité & qui meſure une partie de *C* eſt ſemblable à un nombre dont *m* eſt l'unité & qui meſure *H* partie de *G*. *E* eſt auſſi meſurée par un nombre *r* qui eſt ſemblable à *S*.

En ſuppoſant que *m* meſure *H*, *u* meſure *E*, d'où il ſuit que la grandeur meſurée par *u* eſt meſurée par *r* par un nombre ſemblable à *S*. On prouvera donc comme ci deſſus que la grandeur meſurée par *ſ* eſt meſurée par un nombre ſemblable à *o* & à *M* & par conſequent auſſi que la grandeur meſurée par *m* eſt meſurée par un nombre ſemblable à *P*.

En ſuppoſant que *m* meſure une partie de *H*, on trouvera que *C E* &c. pluſieurs parties de *A* ſont meſurées chacune par deux nombres tels que cette partie & la ſuivante ſont meſurées par deux nombres ſemblables & par deux autres nombres qui ont la même unité. On voit auſſi que l'un des deux nombres qui meſurent l'une de ces

parties

parties eſt ſemblable à un nombre dont *m* eſt l'unité & qui meſure *G* partie de *A*, que l'un des deux nombres qui meſurent la partie ſuivante eſt ſemblable à un nombre dont *m* eſt l'unité & qui meſure *H* partie de *G*, &c. On trouvera donc enfin une de ces parties qui ſera telle que l'un des deux nombres qui la meſurent eſt ſemblable à un nombre dont *m* eſt l'unité & qui meſure la grandeur que *m* meſure. Cette partie ſera donc telle que la grandeur meſurée par l'unité de l'un de ces nombres qui la meſurent ſera meſurée par un nombre ſemblable à l'autre & que la grandeur meſurée par l'unité de celui ci ſera meſurée par un nombre ſemblable à celui là. Or il ſuit de là que chacune de ces parties eſt telle que la grandeur meſurée par l'unité de l'un de ces nombres qui la meſurent eſt meſurée par un nombre ſemblable à l'autre & que la grandeur meſurée par l'unité de celui ci eſt meſurée par un nombre ſemblable à celui là & par conſequent auſſi la grandeur meſurée par *ſ* eſt meſurée par un nombre ſemblable à *M* & la grandeur meſurée par *m* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *P*.

Un nombre *y* dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *M* meſure donc la grandeur meſurée par *ſ par Theor. 67.* *y* eſt donc *par Theor. 61.* l'unité d'un nombre *Y* qui meſure *A* & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *P*. Donc *par Theor. 85.* *A* eſt meſurée par un nombre *X* dont l'unité *x* eſt z priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *x* eſt ſemblable à *Y* & à *P* & que *X* eſt ſemblable à *y* & à *M*.

THEOREME CVI.

La grandeur mesurée par deux nombres à qui des diviseurs semblables donnent des quotiens premiers entre eux est mesurée par un troisieme nombre qui a deux diviseurs dont l'un qui est semblable au quotient du premier nombre donne un quotient semblable au second & l'autre qui est semblable au quotient du second nombre donne un quotient semblable au premier. Soit la grandeur *A* mesurée par un nombre *O* dont *o* soit l'unité & par un nombre *N* dont l'unité *n* soit *o* prise un nombre de fois, par un nombre *V* dont *u* soit l'unité & par un nombre *T* dont l'unité *t* soit *u* prise un nombre de fois. Si *NT* sont premiers entre eux & que *n* soit semblable à *t*, deux nombres qui ont la même unité sont tels que l'un qui est semblable à *N* est l'unité d'un nombre qui mesure *A* & qui est semblable à *V* & que l'autre qui est semblable à *T* est l'unité d'un nombre qui mesure *A* & qui est semblable à *O*.

La grandeur *A* etant mesurée par le nombre *O* dont *o* est l'unité & par le nombre *N* dont l'unité *n* est *o* prise un nombre de fois, par le nombre *V* dont *u* est l'unité & par le nombre *T* dont l'unité *t* est *u* prise un nombre de fois, il s'ensuit *par Theor. 85.* que *A* est mesurée par un nombre *M* dont l'unité *m* est *o* prise un nombre de fois & qui est tel que *m* est semblable à *N* & que *M* est semblable à *n* & par un nombre *S* dont l'unité *ſ* est *u* prise un nombre de fois & qui est tel que *ſ* est semblable à *T* & que *S* est

S eſt ſemblable à *t*. *n* etant ſemblable à *t*, *M* eſt ſemblable à *S*.

Suppoſé que *o* meſure la grandeur meſurée par *m* & que *u* meſure la grandeur meſurée par *ſ*. *M* eſt donc ſemblable à *O par Theor. 76.* & *S* eſt ſemblable à *V*. Il eſt donc evident que *m* qui eſt ſemblable à *N* eſt l'unité de *M* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *V* & que *m* qui eſt ſemblable à *ſ* & à *T* eſt l'unité de *M* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *O*.

Suppoſé que *o* meſure la grandeur meſurée par *m* & que *u* meſure une partie de la grandeur meſurée par *ſ*. *M* & par conſequent *S* eſt encore ſemblable à *O*. Donc un nombre dont *u* eſt l'unité & qui meſurant la grandeur meſurée par *u* eſt ſemblable à *m* & à *N* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *V* & *ſ* qui eſt ſemblable à *T* eſt l'unité de *S* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *O*.

Suppoſé que *o* meſure une partie de la grandeur meſurée par *m* & que *u* meſure une partie de la grandeur meſurée par *ſ*. *M* etant ſemblable à *S*, la grandeur meſurée par *m* eſt egale à la grandeur meſurée par *ſ par Theor. 79.* d'où il ſuit *par Theor. 67.* que la grandeur meſurée par *m* eſt meſurée par *ſ*. Or *N T* etant premiers entre eux, *m ſ* ſont premiers entre eux *par Theor. 96.* Un nombre *y* dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *m* & à *N* eſt donc l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par

m &

m & qui eſt ſemblable à *ſ* & à *T* & un nombre *x* dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *ſ* & à *T* eſt l'unité d'un nombre qui meſure auſſi la grandeur meſurée par *m* & qui eſt ſemblable à *m* & à *N par Theor. 105.* La grandeur meſurée par *u* eſt egale à la grandeur meſurée par *y par Theor. 79.* d'où il ſuit *par Theor. 67.* que la grandeur meſurée par *u* eſt meſurée par *y* & par conſequent *y* eſt l'unité d'un nombre *Y* qui meſure *A* & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *V*. La grandeur meſurée par *o* etant auſſi egale à la grandeur meſurée par *x* eſt meſurée par *x* & *x* eſt l'unité d'un nombre *X* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *O*. *y* dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *N* eſt donc l'unité de *Y* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *V* & *x* dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *T* eſt l'unité de *X* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *O*.

THEOREME CVII.

Si une de pluſieurs grandeurs qui ont une même unité & une autre grandeur ont une même unité, toutes ces grandeurs ont une même unité. Soient *ABCD* des grandeurs. Si *r* eſt une unité de *A* & de *B*, *ſ* une unité de *B* & de *C*, z une unité de *C* & de *D*, toutes ces grandeurs *ABCD* ont une même unité.

Les grandeurs *ABC* etant telles que *r* eſt une unité de *A* & de *B* & que *ſ* eſt une unité de *B* & de *C*, *r* eſt l'unité d'un nombre *R* qui meſure *B* & *ſ* eſt auſſi l'unité d'un nombre *S* qui meſure *B*.

Suppo-

Suppoſé que *r* & *ſ* meſurent *B*. Si *r* eſt *ſ*, *ſ* meſure la grandeur meſurée par *r* & ſi *r* comprend *ſ*, *ſ* meſure auſſi la grandeur meſurée par *r* *par Theor.* 44. & par conſequent, ſoit que *r* meſure *A* ou des coordonnées qui epuiſent *A*, *ſ* eſt une unité de *A*, de *B* & de *C*. Si *r* n'etant pas *ſ* ne comprend point *ſ* & n'eſt pas compriſe par *ſ*, *t* meſure de *B* eſt compriſe par *r* & par *ſ* *par Theor.* 41. & puisque *par Theor.* 44. *t* meſure la grandeur meſurée par *r* & la grandeur meſurée par *ſ*, *t* eſt une unité de *A*, de *B* & de *C*.

Suppoſé que *r* meſure *B* & que *ſ* meſure une partie de *B*. *S* meſure la grandeur meſurée par *r* *par Theor.* 67. *S* eſt donc une unité de *A*, d'où il ſuit *par Theor.* 72. que *ſ* eſt une unité de *A* de *B* & de *C*.

Suppoſé que *ſ* meſurant une partie de *B*, *r* meſure auſſi une partie de *B*. Un nombre *x* dont *y* eſt l'unité, eſt l'unité d'un nombre *X* qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *S* & un nombre *u* dont *y* eſt l'unité, eſt l'unité d' un nombre *V* qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *R* *par Theor.* 96. *Cor.* & 106. La grandeur meſurée par *ſ* eſt egale à la grandeur meſurée par *x* *par Theor.* 79. d'où il ſuit *par Theor.* 67. que la grandeur meſurée par *ſ* eſt meſurée par *x*. La grandeur meſurée par *r* etant auſſi egale à la grandeur meſurée par *u* eſt meſurée par *u*. *x* eſt donc une unité de *C* & *u* eſt une unité de *A*, d'où il ſuit *par Theor.* 72. que *y* eſt une unité de *A*, de *B* & de *C*.

ABC ayant une même unité & z etant une unité de *C* & de la grandeur *D*, on prouvera de même que *ABCD* ont une même unité.

DEFINITION X.

Un nombre *eſt à* un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre, ſi les deux premiers ayant des diviſeurs ſemblables & les deux derniers ayant auſſi des diviſeurs ſemblables le quotient du premier eſt ſemblable au quotient du troiſieme & le quotient du ſecond au quotient du quatrieme. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *R* dont *r* ſoit l'unité & par un nombre *Q* dont l'unité *q* ſoit *r* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *B* meſurée par un nombre *T* dont *t* ſoit l'unité & par un nombre *S* dont l'unité *ſ* ſoit *t* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *C* meſurée par un nombre *X* dont *x* ſoit l'unité & par un nombre *V* dont l'unité *u* ſoit *x* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *D* meſurée par un nombre *Z* dont z ſoit l'unité & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit z priſe un nombre de fois. Si *q* eſt ſemblable à *ſ* & *u* ſemblable à *y* & que *Q* ſoit ſemblable à *V* & *S* ſemblable à *Y*, *R* eſt à *T* ce que *X* eſt à *Z*.

THEOREME CVIII.

L'unité eſt au nombre multiplié ce que le multiplicateur eſt au produit. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *Z* dont z ſoit l'unité & par un nombre *V* dont l'unité *u* ſoit z priſe un nombre de fois. Soit *y* un nombre dont z ſoit

ſoit l'unité. Si *y* eſt z, *y* eſt à *u* ce que *V* eſt à *Z*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *Z* dont z eſt l'unité & par le nombre *V* dont l'unité *u* eſt z priſe un nombre de fois, ſoit *B* une grandeur meſurée par *u*, *C* une grandeur meſurée par z.

z etant l'unité du nombre *y* qui eſt le même que z, *y* meſure *C* & *y* eſt l'unité d'un nombre *x* qui meſure *C*.

y meſurant la grandeur meſurée par z eſt auſſi l'unité d'un nombre *t* qui meſure *B* & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *u*.

V eſt l'unité d'un nombre *S* qui meſure *A*.

Enfin *A* eſt meſurée par un nombre *R* dont l'unité *r* eſt z priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *r* eſt ſemblable à *V* & que *R* eſt ſemblable à *u* *par Theor. 85.*

Donc puiſque *y* eſt ſemblable à *y* & que *V* eſt ſemblable à *r*, que *x* eſt ſemblable à *S* & que *t* eſt ſemblable à *R*, *y* eſt à *u* ce que *V* eſt à *Z*.

EXEMPLE. Une grandeur meſurée par 3 fois 4 *a* eſt meſurée par 12 *a*. Or une fois *a* eſt à 4 *a* ce que l'unité quatre *a* priſe 3 fois eſt à 12 *a*.

COROLLAIRE.

Soient *V X Y Z* des nombres tels que *V* ſoit ſemblable à *X* & que *Y* ſoit ſemblable à *Z*.

Les

Les grandeurs meſurées par ces nombres etant meſurées par des nombres dont ceux là ſont les unitez, on voit auſſi que *V* eſt à *X* ce que *Y* eſt à *Z*. Un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre, ſi le premier eſt ſemblable au ſecond & que le troiſieme ſoit ſemblable au quatrieme.

THEOREME CIX.

Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre & que le premier ſoit ſemblable au ſecond, le troiſieme eſt ſemblable au quatrieme. Soit *r* l'unité d'un nombre *R* qui meſure la grandeur *A*, *t* l'unité d'un nombre *T* qui meſure la grandeur *B*, *x* l'unité d'un nombre *X* qui meſure la grandeur *C*, z l'unité d'un nombre *Z* qui meſure la grandeur *D*. Si *R* eſt à *T* ce que *X* eſt à *Z* & que *R* ſoit ſemblable à *T*, *X* eſt ſemblable à *Z*.

Puisque le nombre *R* dont *r* eſt l'unité & qui meſure la grandeur *A* eſt au nombre *T* dont *t* eſt l'unité & qui meſure la grandeur *B* ce que le nombre *X* dont *x* eſt l'unité & qui meſure la grandeur *C* eſt au nombre *Z* dont z eſt l'unité & qui meſure la grandeur *D*, un nombre *Q* dont l'unité *q* eſt *r* priſe un nombre de fois, un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois, un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt z priſe un nombre de fois ſont tels que *Q* meſure *A*, que *S* meſure *B*, que *V* me-

mesure *C*, que *Y* mesure *D*, que *q* est semblable à *s* & *u* semblable à *y*, que *Q* est semblable à *V* & *S* semblable à *Y*.

Or puisque *R* est semblable à *T* & que *q* est semblable à *s*, *Q* est semblable à *S* *par Theor. 88.* *Q* etant semblable à *V* & *S* etant semblable à *Y*, *V* est donc semblable à *Y* & puisque *u* est semblable à *y*, il s'ensuit *par Theor. 86.* que *X* est semblable à *Z*.

THEOREME CX.

Si un nombre est à un autre ce qu'un troisieme nombre est à un autre & que les deux premiers soient premiers entre eux, deux diviseurs semblables donnent aux derniers des quotiens semblables aux premiers. Soit *r* l'unité d'un nombre *R* qui mesure la grandeur *A*, *t* l'unité d'un nombre *T* qui mesure la grandeur *B*, *x* l'unité d'un nombre *X* qui mesure la grandeur *C*, z l'unité d'un nombre *Z* qui mesure la grandeur *D*. Si *R* est à *T* ce que *X* est à *Z* & que *R T* soient premiers entre eux, un nombre *V* dont l'unité *u* est *x* prise un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* est z prise un nombre de fois sont tels que *V* qui mesure *C* est semblable à *R*, que *Y* qui mesure *D* est semblable à *T* & que *u* est semblable à *y*.

Puisque le nombre *R* dont *r* est l'unité & qui mesure la grandeur *A* est au nombre *T* dont *t* est l'unité & qui mesure la grandeur *B* ce que le nombre *X* dont *x* est l'unité & qui mesure la

grandeur *C* eſt au nombre *Z* dont *z* eſt l'unité & qui meſure la grandeur *D*, un nombre *Q* dont l'unité *q* eſt *r* priſe un nombre de fois, un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois, un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt *z* priſe un nombre de fois ſont tels que *Q* meſure *A*, que *S* meſure *B*, que *V* meſure *C*, que *Y* meſure *D*, que *q* eſt ſemblable à *ſ* & *u* ſemblable à *y*, que *Q* eſt ſemblable à *V* & *S* ſemblable à *Y*.

Or puiſque *R T* ſont premiers entre eux & que *q* eſt ſemblable à *ſ*, *r* meſure la grandeur meſurée par *q* & *t* meſure la grandeur meſurée par *ſ*. *Q* eſt donc ſemblable à *R* *par Theor.* 76. & *S* eſt ſemblable à *T* & par conſequent *V* qui eſt ſemblable à *Q* eſt ſemblable à *R* & *Y* qui eſt ſemblable à *S* eſt ſemblable à *T*.

COROLLAIRE.

Si donc *X Z* ſont auſſi premiers entre eux, *X* qui eſt ſemblable à *V* eſt ſemblable à *R* & *Z* qui eſt ſemblable à *Y* eſt ſemblable à *T*. Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre & que les deux premiers etant premiers entre eux, les deux derniers ſoient auſſi premiers entre eux, le premier eſt ſemblable au troiſieme & le ſecond eſt ſemblable au quatrieme.

THEOREME CXI.

Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre, le premier eſt au troiſieme

me ce que le ſecond eſt au quatrieme. Soit *o* l'unité d'un nombre *O* qui meſure la grandeur *A*, *r* l'unité d'un nombre *R* qui meſure la grandeur *B*, *u* l'unité d'un nombre *V* qui meſure la grandeur *C*, z l'unité d'un nombre Z qui meſure la grandeur *D*. Si *O* eſt à *R* ce que *V* eſt à *Z*, *O* eſt à *V* ce que *R* eſt à *Z*.

Puiſque le nombre *O* dont *o* eſt l'unité & qui meſure la grandeur *A* eſt au nombre *R* dont *r* eſt l'unité & qui meſure la grandeur *B* ce que le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & qui meſure la grandeur *C* eſt au nombre *Z* dont z eſt l'unité & qui meſure la grandeur *D*, un nombre *N* dont l'unité *n* eſt *o* priſe un nombre de fois, un nombre *Q* dont l'unité *q* eſt *r* priſe un nombre de fois, un nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt z priſe un nombre de fois ſont tels que *N* meſure *A*, que *Q* meſure *B*, que *T* meſure *C*, que *Y* meſure *D*, que *n* eſt ſemblable à *q* & *t* ſemblable à *y*, que *N* eſt ſemblable à *T* & *Q* ſemblable à *Y*.

A eſt donc meſurée par un nombre *M* dont l'unité *m* eſt *o* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *n* eſt ſemblable à *M* & que *N* eſt ſemblable à *m* *par Theor. 85.* *B* eſt meſurée par le nombre *P* dont l'unité *p* eſt *r* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *q* eſt ſemblable à *P* & que *Q* eſt ſemblable à *p*. *C* eſt meſurée par un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *u* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *t* eſt ſemblable

à *S* & que *T* eſt ſemblable à *ſ*. *D* eſt meſurée par un nombre *X* dont l'unité *x* eſt *z* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *y* eſt ſemblable à *X* & que *Y* eſt ſemblable à *x*.

N etant ſemblable à *T* & *Q* etant ſemblable à *Y*, *m* eſt donc ſemblable à *ſ* & *p* eſt ſemblable à *x*. De plus *n* etant ſemblable à *q* & *t* etant ſemblable à *y*, *M* eſt ſemblable à *P* & *S* eſt ſemblable à *X*. *O* eſt donc à *V* ce que *R* eſt à *Z*.

THEOREME CXII.

La ſomme de deux nombres eſt à l'un d'entre eux ce que la ſomme de deux autres nombres eſt à l'un d'entre eux, ſi le premier nombre eſt au premier reſte ce que l'autre nombre eſt au ſecond reſte. Soit la grandeur *A* epuiſée par les coordonnées *B C* & meſurée par un nombre *L* dont l'unité *q* ſoit l'unité d'un nombre *O* qui meſure *B* & d'un nombre *Q* qui meſure *C*. Soit la grandeur *E* epuiſée par les coordonnées *F G* & meſurée par un nombre *S* dont l'unité *z* ſoit l'unité d'un nombre *X* qui meſure *F* & d'un nombre *Z* qui meſure *G*. Si *O* eſt à *Q* ce que *X* eſt à *Z*, *L* eſt à *O* ce que *S* eſt à *X*.

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *B C* & meſurée par le nombre *L* dont l'unité *q* eſt l'unité du nombre *O* qui meſure *B* & du nombre *Q* qui meſure *C* & la grandeur *E* etant epuiſée par les coordonnées *F G* & meſurée par le nombre *S* dont l'unité *z* eſt l'unité du nom-

nombre *X* qui meſure *F* & du nombre *Z* qui meſure *G*, puiſque *O* eſt à *Q* ce que *X* eſt à *Z*, un nombre *N* dont l'unité *n* eſt *q* priſe un nombre de fois, un nombre *P* dont l'unité *p* eſt auſſi *q* priſe un nombre de fois, un nombre *V* dont l'unité *u* eſt z priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt auſſi z priſe un nombre de fois ſont tels que *N* meſure *B*, que *P* meſure *C*, que *V* meſure *F*, que *Y* meſure *G*, que *n* eſt ſemblable à *p* & *u* ſemblable à *y*, que *N* eſt ſemblable à *V* & *P* ſemblable à *Y*.

Or *n* etant ſemblable à *p* & *u* etant ſemblable à *y*, *n* eſt le même que *p* & *u* eſt le même que *y par Theor.* 77. *Cor.* & puiſque la grandeur meſurée par *n* eſt meſurée par *p*, *B* eſt meſurée par un nombre *M* dont *p* eſt l'unité & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *N*. Par la même raiſon *F* eſt meſurée par un nombre *T* dont *y* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *V*. *N* etant ſemblable à *V*, *M* eſt ſemblable à *T*.

A etant donc epuiſée par les coordonnées *BC* telles que *M* meſure *B* & que *P* meſure *C*, *A* eſt meſurée par un nombre *K* dont *p* eſt l'unité *par Theor. 70.* & *E* etant epuiſée par les coordonnées *FG* telles que *T* meſure *F* & que *Y* meſure *G*, *E* eſt meſurée par un nombre *R* dont *y* eſt l'unité. *M* etant ſemblable à *T* & *P* etant ſemblable à *Y*, *K* eſt ſemblable à *R par Theor. 83.*

 Or

Or puisque *p* eſt l'unité de *K* & de *M*, que *y* eſt l'unité de *R* & de *T*, que *K* eſt ſemblable à *R* & que *M* eſt ſemblable à *T*, il s'enſuit que *L* eſt à *O* ce que *S* eſt à *X*.

THEOREME CXIII.

Si la ſomme de deux nombres eſt à l'un d'entre eux ce que la ſomme de deux autres nombres eſt à l'un d'entre eux, le premier nombre eſt au premier reſte ce que l'autre nombre eſt à l'autre reſte. Soit la grandeur *A* epuiſée par les coordonnées *BC* & meſurée par un nombre *M* dont l'unité *q* ſoit l'unité d'un nombre *O* qui meſure *B* & d'un nombre *Q* qui meſure *C*. Soit la grandeur *E* epuiſée par les coordonnées *FG* & meſurée par un nombre *T* dont l'unité z ſoit l'unité d'un nombre *X* qui meſure *F* & d'un nombre *Z* qui meſure *G*. Si *M* eſt à *O* ce que *T* eſt à *X*, *O* eſt à *Q* ce que *X* eſt à *Z*.

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *BC* & meſurée par le nombre *M* dont l'unité *q* eſt l'unité du nombre *O* qui meſure *B* & du nombre *Q* qui meſure *C* & la grandeur *E* etant epuiſée par les coordonnées *FG* & meſurée par le nombre *T* dont l'unité z eſt l'unité du nombre *X* qui meſure *F* & du nombre *Z* qui meſure *G*, puiſque *M* eſt à *O* ce que *T* eſt à *X*, un nombre *L* dont l'unité *l* eſt *q* priſe un nombre de fois, un nombre *N* dont l'unité *n* eſt auſſi *q* priſe un nombre de fois, un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt z priſe un nombre de fois & un

un nombre *V* dont l'unité *u* eſt auſſi z priſe un nombre de fois ſont tels que *L* meſure *A*, que *N* meſure *B*, que *S* meſure *E*, que *V* meſure *F*, que *l* eſt ſemblable à *n* & *ſ* ſemblable à *u*, que *L* eſt ſemblable à *S* & *N* ſemblable à *V*.

Or *l* etant ſemblable à *n* eſt le même que *n par Theor. 77. Cor.* & *ſ* etant ſemblable à *u* eſt le même que *u* & puiſque la grandeur meſurée par *l* eſt meſurée par *n*, *A* eſt meſurée par un nombre *K* dont *n* eſt l'unité & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *L*. Par la même raiſon *E* eſt meſurée par un nombre *R* dont *u* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *S*. *L* etant ſemblable à *S*, *K* eſt ſemblable à *R*.

A etant epuiſée par les coordonnées *B C* & *n* etant l'unité de *K* qui meſure *A* & de *N* qui meſure *B*, *C* eſt meſurée par un nombre *P* dont *n* eſt l'unité *par Theor. 71.* & puiſque *E* eſt epuiſée par les coordonnées *FG* & que *u* eſt l'unité de *R* qui meſure *E* & de *V* qui meſure *F*, *G* eſt meſurée par un nombre *Y* dont *u* eſt l'unité. *K* etant ſemblable à *R* & *N* etant ſemblable à *V*, *P* eſt ſemblable à *Y par Theor. 84.*

Or puiſque *n* eſt l'unité de *N* & de *P*, que *u* eſt l'unité de *V* & de *Y*, que *N* eſt ſemblable à *V* & que *P* eſt ſemblable à *Y*, *O* eſt à *Q* ce que *X* eſt à *Z*.

THEOREME CXIV.

Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre & que le troiſieme ſoit

au quatrieme ce qu'un cinquieme nombre est à un autre, le premier est au second ce que le cinquieme est au sixieme. Soit *c* l'unité d'un nombre *C* qui mesure la grandeur Γ, *f* l'unité d'un nombre *F* qui mesure la grandeur Δ, *l* l'unité d'un nombre *L* qui mesure la grandeur Θ, *q* l'unité d'un nombre *Q* qui mesure la grandeur Λ, *x* l'unité d'un nombre *X* qui mesure la grandeur Ξ, ω l'unité d'un nombre Ω qui mesure la grandeur Π. Si *C* est à *F* ce que *L* est à *Q* & que *L* soit à *Q* ce que *X* est à Ω, *C* est à *F* ce que *X* est à Ω.

Puisque le nombre *C* dont *c* est l'unité & qui mesure la grandeur Γ est au nombre *F* dont *f* est l'unité & qui mesure la grandeur Δ ce que le nombre *L* dont *l* est l'unité & qui mesure la grandeur Θ est au nombre *Q* dont *q* est l'unité & qui mesure la grandeur Λ, un nombre *B* dont l'unité *b* est *c* prise un nombre de fois, un nombre *E* dont l'unité *e* est *f* prise un nombre de fois, un nombre *H* dont l'unité *h* est *l* prise un nombre de fois & un nombre *N* dont l'unité *n* est *q* prise un nombre de fois sont tels que *B* mesure Γ, que *E* mesure Δ, que *H* mesure Θ, que *N* mesure Λ, que *b* est semblable à *e* & *h* semblable à *n*, que *B* est semblable à *H* & *E* semblable à *N*. Et puisque *L* est à *Q* ce que le nombre *X* dont *x* est l'unité & qui mesure la grandeur Ξ est au nombre Ω dont ω est l'unité & qui mesure la grandeur Π, un nombre *K* dont l'unité *k* est *l* prise un nombre de fois, un nombre *P* dont l'unité *p* est

eſt *q* priſe un nombre de fois, un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois & un nombre Ψ dont l'unité ⸸ eſt ω priſe un nombre de fois ſont tels que *K* meſure Θ, que *P* meſure Λ, que *V* meſure Ξ, que Ψ meſure Π, que *k* eſt ſemblable à *p* & *u* ſemblable à ⸸, que *K* eſt ſemblable à *V* & *P* ſemblable à Ψ.

Suppoſé que *H N* ſoient premiers entre eux & que *K P* ſoient auſſi premiers entre eux. *b* eſt le même que *k* & *n* eſt le même que *p par Theor. 102.* d'où il ſuit *par Theor. 76.* que *H* eſt ſemblable à *K* & que *N* eſt ſemblable à *P*. *B* etant ſemblable à *H* & *K* etant ſemblable à *V*, *B* eſt donc ſemblable à *V* & *E* etant ſemblable à *N* & *P* ſemblable à Ψ, *E* eſt ſemblable à Ψ. Or puiſque *b* eſt ſemblable à *e*, que *u* eſt ſemblable à ⸸, que *B* eſt ſemblable à *V* & que *E* eſt ſemblable à Ψ, *C* eſt à *F* ce que *X* eſt à Ω.

Suppoſé que *HN* ſoient premiers entre eux & que *K P* ne ſoient pas premiers entre eux. *k* eſt l'unité d'un nombre *i* qui meſure la grandeur meſurée par *h* & *p* eſt l'unité d'un nombre *o* qui meſure la grandeur meſurée par *n par Theor. 103.* Or *h* etant ſemblable à *n* & *k* etant ſemblable à *p*, *i* eſt ſemblable à *o par Theor. 88.* De plus *i* eſt l'unité d'un nombre *I* qui meſure Θ *par Theor. 89.* & *o* eſt l'unité d'un nombre *O* qui meſure Λ. *I* eſt ſemblable à *H par Theor. 76.* & *O* eſt ſemblable à *N*.

K etant ſemblable à V, un nombre t dont u eſt l'unité & qui eſt ſemblable à i eſt donc l'unité d'un nombre T qui meſure Ξ *par Theor. 88. Cor. 2.* & T eſt ſemblable à I *par Theor. 88.* De même P etant ſemblable à Ψ, un nombre φ dont $\downarrow$ eſt l'unité & qui eſt ſemblable à o eſt l'unité d'un nombre Φ qui meſure Π & Φ eſt ſemblable à O. Or puiſque u eſt l'unité de t & $\downarrow$ l'unité de φ, la grandeur meſurée par t eſt meſurée par un nombre *ſ* dont x eſt l'unité *par Theor. 72.* & la grandeur meſurée par φ eſt meſurée par un nombre z dont ω eſt l'unité. i etant ſemblable à o, d'où il ſuit que t eſt ſemblable à φ & u etant ſemblable à $\downarrow$, *ſ* eſt ſemblable à z *par Theor. 86.* *ſ* eſt l'unité d'un nombre S qui meſure Ξ *par Theor. 87.* & qui eſt ſemblable à T *par Theor. 76.* z eſt auſſi l'unité d'un nombre Z qui meſure Π & qui eſt ſemblable à Φ. Or puiſque b eſt ſemblable à e, que *ſ* eſt ſemblable à z, que B eſt ſemblable à H, à I, à T & à S & que E eſt ſemblable à N, à O, à Φ & à Z, il s'enſuit que C eſt à F ce que X eſt à Ω.

Suppoſé que KP n'etant pas premiers entre eux HN ne ſoient pas non plus premiers entre eux. Un nombre G dont l'unité g eſt b priſe un nombre de fois & un nombre M dont l'unité m eſt n priſe un nombre de fois ſont tels que G meſure Θ, que M meſure Λ, que g eſt ſemblable à m & que GM ſont premiers entre eux *par Theor. 95.* k eſt donc une unité de la grandeur meſurée par g & p eſt une unité de la grandeur

deur meſurée par *m par Theor. 103*. On prouvera donc comme dans le ſecond cas qu'un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *x* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt *ω* priſe un nombre de fois ſont tels que *R* meſure Ξ, que *Y* meſure Π, que *r* eſt ſemblable à *y*, que *G* eſt ſemblable à *R* & que *M* eſt ſemblable à *Y*.

Comme *B* eſt ſemblable à *H* & que *h* eſt l'unité de *g*, que *E* eſt ſemblable à *N* & que *n* eſt l'unité de *m*, on prouvera auſſi qu'un nombre *A* dont l'unité *a* eſt *c* priſe un nombre de fois & un nombre *D* dont l'unité *d* eſt *f* priſe un nombre de fois ſont tels que *A* meſure Γ, que *D* meſure Δ, que *a* eſt ſemblable à *d*, que *A* eſt ſemblable à *G* & que *D* eſt ſemblable à *M*. Or puiſque *a* eſt ſemblable à *d*, que *r* eſt ſemblable à *y*, que *A* eſt ſemblable à *G* & à *R* & que *D* eſt ſemblable à *M* & à *Y*, *C* eſt à *F* ce que *X* eſt à Ω.

THEOREME CXV.

Si deux nombres ont des diviſeurs ſemblables, l'un de ces nombres eſt à l'autre ce que le quotient du premier eſt au quotient du ſecond. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité & par un nombre *T* dont *t* l'unité ſoit *u* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *B* meſurée par un nombre *Z* dont z ſoit l'unité & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit z priſe un nombre de fois. Si *t* eſt ſemblable à *y*, *V* eſt à *Z* ce que *T* eſt à *Y*.

La

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *Z* dont z eſt l'unité & par le nombre *Y* dont l'unité *y* eſt z priſe un nombre de fois, *t* eſt l'unité d'un nombre *ſ* qui meſure la grandeur meſurée par *t*, d'où il ſuit que *ſ* eſt l'unité d'un nombre *S* qui meſure *A* & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *T*. *y* eſt auſſi l'unité d'un nombre *x* qui meſure la grandeur meſurée par *y* & *x* eſt l'unité d'un nombre *X* qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *Y*. Or puiſque *t* eſt ſemblable à *y* & que *ſ* eſt ſemblable à *x*, que *T* eſt ſemblable à *S* & que *Y* eſt ſemblable à *X*, il s'enſuit que *V* eſt à *Z* ce que *T* eſt à *Y*.

THEOREME CXVI.

Si deux nombres ont des multiplicateurs ſemblables, l'un de ces nombres eſt à l'autre ce que le premier produit eſt au ſecond. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *V* dont *u* ſoit l'unité & par un nombre *T* dont l'unité *t* ſoit *u* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *B* meſurée par un nombre *Z* dont z ſoit l'unité & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit z priſe un nombre de fois. Si *T* eſt ſemblable à *Y*, *t* eſt à *y* ce que *V* eſt à *Z*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & par le nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois & la gran-

grandeur *B* etant mesurée par le nombre *Z* dont z est l'unité & par le nombre *Y* dont l'unité *y* est z prise un nombre de fois, *A* est mesurée par un nombre *S* dont l'unité *ʃ* est *u* prise un nombre de fois & qui est tel que *T* est semblable à *ʃ* & que *t* est semblable à *S*, *par Theor. 85.* *B* est aussi mesurée par un nombre *X* dont l'unité *x* est z prise un nombre de fois & qui est tel que *Y* est semblable à *x* & que *y* est semblable à *X*. *T* etant semblable à *Y*, *ʃ* est semblable à *x*. *S* est donc à *X* ce que *V* est à *Z* *par Theor. 115.* Or *par Theor. 108. Cor.* *S* est à *t* ce que *X* est à *y*, d'où il suit *par Theor. 111.* que *S* est à *X* ce que *t* est à *y*. Donc *par Theor. 114.* *t* est à *y* ce que *V* est à *Z*.

THEOREME CXVII.

Si un nombre est à un autre ce qu'un troisieme nombre est à un autre & que le premier soit un diviseur du second, le troisieme est semblable à un diviseur qui donne au quatrieme un quotient semblable au quotient du second. Soit la grandeur *A* mesurée par un nombre *V* dont *u* soit l'unité & par un nombre *S* dont l'unité *ʃ* soit *u* prise un nombre de fois. Soit la grandeur *B* mesurée par un nombre *Z* dont z soit l'unité. Si *ʃ* est à *V* ce qu'un nombre *x* est à *Z*, *B* est mesurée par un nombre *Y* dont l'unité *y* est z prise un nombre de fois & qui est tel que *x* est semblable à *y* & que *S* est semblable à *Y*.

La

La grandeur *A* etant mesurée par le nombre *V* dont *u* est l'unité & par le nombre *S* dont l'unité *ſ* est *u* prise un nombre de fois, la grandeur mesurée par *u* est mesurée par un nombre *t* dont *u* est l'unité. Or *t* est à *ſ* ce que *S* est à *V par Theor. 108.* Donc *par Theor. 111.* *t* est à *S* ce que *ſ* est à *V*. La grandeur *B* etant mesurée par le nombre Z dont z est l'unité & *ſ* etant à *V* ce qu'un nombre *x* est à *Z*, *t* est donc à *S* ce que *x* est à *Z par Theor. 114.* Or *t S* etant premiers entre eux & *x* etant l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *x* & qui est semblable à *t*, il paroit *par Theor. 110.* qu'un nombre *y* dont z est l'unité & qui est semblable à *x* est l'unité d'un nombre *Y* qui mesure *B* & qui est semblable à *S*.

THEOREME CXVIII.

Si un nombre est à un autre ce qu'un troisieme nombre est à un autre & que le multiplicateur du premier soit au multiplicateur du second ce que le multiplicateur du troisieme est au multiplicateur du quatrieme, le premier produit est au second ce que le troisieme est au quatrieme. Soit la grandeur *A* mesurée par un nombre *L* dont *l* soit l'unité & par un nombre *K* dont l'unité *k* soit *l* prise un nombre de fois. Soit la grandeur *B* mesurée par un nombre *P* dont *p* soit l'unité & par un nombre *O* dont l'unité *o* soit *p* prise un nombre de fois. Soit la grandeur *C* mesurée par un nombre *T* dont *t* soit l'unité & par un nombre *S* dont

S dont l'unité *ſ* ſoit *t* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *D* meſurée par un nombre *Z* dont z ſoit l'unité & par un nombre *Y* dont l'unité *y* ſoit z priſe un nombre de fois. Si *k* eſt à *o* ce que *ſ* eſt à *y* & que *K* ſoit à *O* ce que *S* eſt à *Y*, *L* eſt à *P* ce que *T* eſt à *Z*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *L* dont *l* eſt l'unité & par le nombre *K* dont l'unité *k* eſt *l* priſe un nombre de fois & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *P* dont *p* eſt l'unité & par le nombre *O* dont l'unité *o* eſt *p* priſe un nombre de fois & la grandeur *C* etant meſurée par le nombre *T* dont *t* eſt l'unité & par le nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois & la grandeur *D* etant meſurée par le nombre *Z* dont z eſt l'unité & par le nombre *Y* dont l'unité *y* eſt z priſe un nombre de fois, puiſque *K* eſt à *O* ce que *S* eſt à *Y*, un nombre *I* dont l'unité *i* eſt *k* priſe un nombre de fois, un nombre *N* dont l'unité *n* eſt *o* priſe un nombre de fois, un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *ſ* priſe un nombre de fois & un nombre *X* dont l'unité *x* eſt *y* priſe un nombre de fois ſont tels que *I* meſure *A*, que *N* meſure *B*, que *R* meſure *C*, que *X* meſure *D*, que *i* eſt ſemblable à *n* & *r* ſemblable à *x*, que *I* eſt ſemblable à *R* & *N* ſemblable à *X*.

La grandeur meſurée par *i* eſt meſurée par un nombre *b* dont *l* eſt l'unité *par Theor.* 72. La grandeur meſurée par *n* eſt meſurée par un nombre *m* dont *p* eſt l'unité, la grandeur meſu-

rée

rée par *r* eſt meſurée par un nombre *q* dont *t* eſt l'unité & la grandeur meſurée par *x* eſt meſurée par un nombre *u* dont z eſt l'unité.

Puiſque *i* eſt ſemblable à *n*, *k* eſt donc à *o* ce qua *h* eſt à *m par Theor. 116.* & puiſque *r* eſt ſemblable à *x*, *ſ* eſt à *y* ce que *q* eſt à *u*. *k* etant à *o* ce que *ſ* eſt à *y*, *h* eſt donc à *m* ce que *q* eſt à *u par Theor. 114.*

h eſt donc à *q* ce que *m* eſt à *u par Theor. 111.* *h* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A par Theor. 87.* & qui *par Theor. 76.* eſt ſemblable à *I*, *q* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *R*, *m* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *N* & *u* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à *X*. *I* etant ſemblable à *R*, *h* eſt donc à *q* ce que *L* eſt à *T par Theor. 116.* & *N* etant ſemblable à *X*, *m* eſt à *u* ce que *P* eſt à *Z*. Donc *par Theor. 114.* *L* eſt à *T* ce que *P* eſt à *Z* & par conſequent *L* eſt à *P* ce que *T* eſt à *Z*.

THEOREME CXIX.

Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre & que le diviſeur du premier ſoit au diviſeur du ſecond ce que le diviſeur du troiſieme eſt au diviſeur du quatrieme, le premier quotient eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *L* dont *l* ſoit l'unité & par un nombre *I* dont l'unité *i* ſoit *l* priſe un nombre de fois. Soit la gran-

grandeur *B* meſurée par un nombre *P* dont *p* ſoit l'unité & par un nombre *N* dont l'unité *n* ſoit *p* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *C* meſurée par un nombre *T* dont *t* ſoit l'unité & par un nombre *R* dont l'unité *r* ſoit *t* priſe un nombre de fois. Soit la grandeur *D* meſurée par un nombre *Z* dont *z* ſoit l'unité & par un nombre *X* dont l'unité *x* ſoit *z* priſe un nombre de fois. Si *L* eſt à *P* ce que *T* eſt à *Z* & que *i* ſoit à *n* ce que *r* eſt à *x*, *I* eſt à *N* ce que *R* eſt à *X*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *L* dont *l* eſt l'unité & par le nombre *I* dont l'unité *i* eſt *l* priſe un nombre de fois & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *P* dont *p* eſt l'unité & par le nombre *N* dont l'unité *n* eſt *p* priſe un nombre de fois & la grandeur *C* etant meſurée par le nombre *T* dont *t* eſt l'unité & par le nombre *R* dont l'unité *r* eſt *t* priſe un nombre de fois & la grandeur *D* etant meſurée par le nombre *Z* dont *z* eſt l'unité & par le nombre *X* dont l'unité *x* eſt *z* priſe un nombre de fois, puisque *i* eſt à *n* ce que *r* eſt à *x*, un nombre *K* dont l'unité *k* eſt *l* priſe un nombre de fois, un nombre *O* dont l'unité *o* eſt *p* priſe un nombre de fois, un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt *z* priſe un nombre de fois ſont tels que *K* meſure la grandeur meſurée par *i*, que *O* meſure la grandeur meſurée par *n*, que *S* meſure la grandeur meſurée par *r*, que *Y* meſure la grandeur meſurée par *x*, que

k eſt

k eſt ſemblable à *o* & *ſ* ſemblable à *y*, que *K* eſt ſemblable à *S* & *O* ſemblable à *Y*.

K eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* *par Theor.* 89. & qui eſt ſemblable à *I* *par Theor.* 76. *O* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *N*. *S* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *R* & *Y* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à *X*. *A* eſt donc meſurée par un nombre *H* dont *k* eſt l'unité *par Theor.* 72. *B* eſt meſurée par un nombre *M* dont *o* eſt l'unité. *C* eſt meſurée par un nombre *Q* dont *ſ* eſt l'unité & *D* eſt meſurée par un nombre *V* dont *y* eſt l'unité.

Puiſque *k* eſt ſemblable à *o*, *L* eſt donc à *P* ce que *H* eſt à *M* *par Theor.* 115. & puiſque *ſ* eſt ſemblable à *y*, *T* eſt à *Z* ce que *Q* eſt à *V*. *L* etant à *P* ce que *T* eſt à *Z*, *H* eſt donc à *M* ce que *Q* eſt à *V* *par Theor.* 114.

H eſt donc à *Q* ce que *M* eſt à *V* *par Theor.* 111. *K* etant ſemblable à *S*, *H* eſt donc à *Q* ce que *I* eſt à *R* *par Theor.* 115. 108. *Cor.* 111 *&* 114. & *O* etant ſemblable à *Y*, *M* eſt à *V* ce que *N* eſt à *X*. Donc *par Theor.* 114. *I* eſt à *R* ce que *N* eſt à *X* & par conſequent *I* eſt à *N* ce que *R* eſt à *X*.

COROLLAIRE.

A eſt meſurée par un nombre *H* dont l'unité *h* eſt *l* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *I* eſt ſemblable à *h* & que *i* eſt ſemblable

ble à *H par Theor. 85*. *B* eſt meſurée par un nombre *M* dont l'unité *m* eſt *p* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *N* eſt ſemblable à *m* & que *n* eſt ſemblable à *M*. *C* eſt meſurée par un nombre *Q* &c. Si *I* eſt à *N* ce que *R* eſt à *X*, *b* eſt à *m* ce que *q* eſt à *u par Theor. 108. Cor. 111 & 114*. *H* eſt donc à *M* ce que *Q* eſt à *V*, d'où il ſuit que *i* eſt à *n* ce que *r* eſt à *x*. Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre & que le quotient du premier ſoit au quotient du ſecond ce que le quotient du troiſieme eſt au quotient du quatrieme, le premier diviſeur eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme.

THEOREME CXX.

Si un nombre a deux diviſeurs, l'un eſt à l'autre ce que le ſecond quotient eſt au premier. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *S* dont l'unité *ſ* ſoit z priſe un nombre de fois & par un nombre *X* dont l'unité *x* ſoit auſſi z priſe un nombre de fois. *S* eſt à *X* ce que *x* eſt à *ſ*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt z priſe un nombre de fois & par le nombre *X* dont l'unité *x* eſt auſſi z priſe un nombre de fois, ſuppoſons que *S X* ſoient premiers entre eux & que *ſ x* ſoient auſſi premiers entre eux. *S* eſt ſemblable à *x* & *X* eſt ſemblable à *ſ par Theor. 100.* *S* eſt donc à *x* ce que *X* eſt à *ſ par Theor. 108. Cor.* & *par Theor. 111.* *S* eſt à *X* ce que *x* eſt à *ſ*.

Supposé que *ſx* etant premiers entre eux, *SX* ne ſoient pas premiers entre eux. Un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *ſ* priſe un nombre de fois & un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois meſurent *A* & ſont tels que *R* eſt ſemblable à *x* & que *V* eſt ſemblable à *ſ* & *r* ſemblable à *u* *par Theor. 101.* *R* eſt donc à *x* ce que *V* eſt à *ſ* & par conſequent *R* eſt à *V* ce que *x* eſt à *ſ*. Or *r* etant ſemblable à *u*, *S* eſt à *X* ce que *R* eſt à *V* *par Theor. 115.* Donc *par Theor. 114.* *S* eſt à *X* ce que *x* eſt à *ſ*.

Supposé que *ſx* ne ſoient pas premiers entre eux. Un nombre *T* dont l'unité *t* eſt z priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont *t* eſt l'unité ſont premiers entre eux & tels que *T* meſure la grandeur meſurée par *ſ* & que *Y* meſure la grandeur meſurée par *x* *par Theor. 95 & 77. Cor.* *T* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *S* *par Theor. 89 & 76.* *Y* eſt auſſi l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *X*. Ce que l'on a prouvé fait donc voir que le premier de ces nombres eſt au ſecond ce que *Y* eſt à *T*, d'où il ſuit que *S* eſt à *X* ce que *Y* eſt à *T*. Or *t* etant l'unité de *T* & de *Y*, *ſ* eſt à *x* ce que *T* eſt à *Y* *par Theor. 115.* Donc *S* eſt à *X* ce que *x* eſt à *ſ*.

THEOREME CXXI.

Si un nombre & un autre ſont premiers entre eux & que le premier & un multiplicateur du ſecond

cond ſoient premiers entre eux, le premier & le produit des deux autres ſont premiers entre eux. Soit la grandeur *A* meſurée par un nombre *T* dont *t* ſoit l'unité. Soit la grandeur *B* meſurée par un nombre *Z* dont *z* ſoit l'unité & par un nombre *X* dont l'unité *x* ſoit *z* priſe un nombre de fois. Si *T x* ſont premiers entre eux & que *T X* ſoient auſſi premiers entre eux, *T Z* ſont premiers entre eux.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *T* dont *t* eſt l'unité & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *Z* dont *z* eſt l'unité & par le nombre *X* dont l'unité *x* eſt *z* priſe un nombre de fois, ſuppoſons que *t* ſoit l'unité d'un nombre *R* qui meſure *A* & tel que *R x* etant premiers entre eux, *R Z* ne ſoient pas premiers entre eux.

Un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *t* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt *z* priſe un nombre de fois ſont tels que *S* meſure *A*, que *Y* meſure *B*, que *ſ* eſt ſemblable à *y* & que *S Y* ſont premiers entre eux *par Theor. 95.* *x* etant à *x* ce que *ſ* eſt à *y par Theor. 108. Cor.* *x* eſt à *ſ* ce que *x* eſt à *y par Theor. 111.*

R x etant premiers entre eux, *ſ x* ſont premiers entre eux *par Theor. 98.* Or *par Theor. 120.* *y* eſt à *x* ce que *X* eſt à *Y* & *par Theor. 114.* *ſ* eſt à *x* ce que *X* eſt à *Y*. Donc *B* eſt meſurée par un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois & qui eſt ſemblable à *ſ*

par Theor. 110. Or $\int$ eſt epuiſé par des coordonnées que t meſure *par Theor. 97.* d'où il ſuit que V eſt epuiſé par des coordonnées que u meſure. $\int V$ ne ſont donc pas premiers entre eux *par Theor. 95. Cor.* Donc *par Theor. 98 & 85.* $\int X$ ne ſont pas premiers entre eux & par conſequent R X ne ſont pas premiers entre eux.

Or T X ſont premiers entre eux. T n'eſt donc pas R un nombre qui meſure A & qui ayant l'unité t ſoit tel que ce nombre & x etant premiers entre eux, ce nombre & Z ne ſoient pas premiers entre eux. Mais T eſt un nombre qui meſure A & qui ayant l'unité t eſt tel que $T x$ ſont premiers entre eux. $T Z$ ſont donc premiers entre eux.

THEOREME CXXII.

Si un nombre eſt à un autre ce que le multiplicateur du ſecond eſt au multiplicateur du premier, les deux produits ſont ſemblables. Soit la grandeur A meſurée par un nombre R dont r ſoit l'unité & par un nombre P dont l'unité p ſoit r priſe un nombre de fois. Soit la grandeur B meſurée par un nombre Z dont z ſoit l'unité & par un nombre V dont l'unité u ſoit z priſe un nombre de fois. Si p eſt à u ce que V eſt à P, R eſt ſemblable à Z.

La grandeur A etant meſurée par le nombre R dont r eſt l'unité & par le nombre P dont l'unité p eſt r priſe un nombre de fois & la grandeur B etant meſurée par le nombre Z dont

z eſt

z eſt l'unité & par le nombre *V* dont l'unité *u* eſt z priſe un nombre de fois, ſuppoſons que *pu* ſoient premiers entre eux. Puiſque *p* eſt à *u* ce que *V* eſt à *P*, un nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois & un nombre *O* dont l'unité *o* eſt *p* priſe un nombre de fois ſont tels que *T* meſure *B*, que *O* meſure *A*, que *T* eſt ſemblable à *p*, que *O* eſt ſemblable à *u* & que *o* eſt ſemblable à *t par Theor. 110.*

La grandeur meſurée par *t* eſt meſurée par un nombre *X* dont z eſt l'unité *par Theor. 72.* & puiſque *O* eſt ſemblable à *u* & que *o* eſt ſemblable à *t*, il s'enſuit *par Theor. 85 & 86.* que *P* eſt ſemblable à *X*. *X* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *T par Theor. 87 & 76.* *A* etant donc meſurée par *P* qui eſt ſemblable à *X* & *p* etant ſemblable à *T*, il paroit *par Theor. 85 & 86.* que *R* eſt ſemblable à *Z*.

Suppoſé que *p u* ne ſoient pas premiers entre eux. Un nombre *Q* dont l'unité *q* eſt *r* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt *z* priſe un nombre de fois ſont tels que *Q* meſure la grandeur meſurée par *p*, que *Y* meſure la grandeur meſurée par *u*, que *q* eſt ſemblable à *y* & que *Q Y* ſont premiers entre eux *par Theor. 95.* *Q* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *P par Theor. 89 & 76.* & *q* eſt l'unité d'un nombre *N* qui meſure *A par Theor. 72.* *Y* eſt auſſi l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *V* & *y* eſt l'unité d'un nombre *S* qui meſure *B*.

Or *par Theor. 115.* *p* eſt à *u* ce que *Q* eſt à *Y*, d'où il ſuit *par Theor. 114.* que *Q* eſt à *Y* ce que *V* eſt à *P* & puiſque *Q* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *P* & que *Y* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *V*, ce que l'on vient de prouver fait voir que *N* eſt ſemblable à *S*. *q* etant ſemblable à *y*, *R* eſt donc ſemblable à *Z* *par Theor. 86.*

THEOREME CXXIII.

Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre & que le premier ſoit ſemblable au quatrieme & le ſecond au troiſieme, le premier eſt ſemblable au ſecond. Soit *p* l'unité d'un nombre *P* qui meſure la grandeur *A*, *r* l'unité d'un nombre *R* qui meſure la grandeur *B*, *u* l'unité d'un nombre *V* qui meſure la grandeur *C*, z l'unité d'un nombre *Z* qui meſure la grandeur *D*. Si *P* eſt à *R* ce que *V* eſt à *Z* & que *P* etant ſemblable à *Z*, *R* ſoit ſemblable à *V*, *P* eſt ſemblable à *R*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *P* dont *p* eſt l'unité & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *R* dont *r* eſt l'unité & la grandeur *C* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt l'unité & la grandeur *D* etant meſurée par le nombre *Z* dont z eſt l'unité, ſuppoſons que *PR* ſoient premiers entre eux. Puiſque *P* eſt à *R* ce que *V* eſt à *Z*, un nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois & un nombre

bre *Y* dont l'unité *y* eſt z priſe un nombre de fois ſont tels que *T* meſure *C*, que *Y* meſure *D*, que *T* eſt ſemblable à *P* & que *t* eſt ſemblable à *y par Theor. 110.*

P etant ſemblable à *Z*, un nombre dont *p* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *y* eſt une unité de *A par Theor. 88. Cor. 2.* & *R* etant ſemblable à *V*, un nombre dont *r* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *t* eſt une unité de *B*. Or *PR* etant premiers entre eux, ces deux nombres ſont premiers entre eux *par Theor. 98.* d'où il ſuit *par Theor. 96.* que *ty* ſont premiers entre eux & *t* etant ſemblable à *y*, *u* meſure la grandeur meſurée par *t par Theor. 95. Cor.* Donc *par Theor. 76.* *T* eſt ſemblable à *V* & par conſequent *P* eſt ſemblable à *V* & à *R*.

Suppoſé que *P R* ne ſoient pas premiers entre eux. Un nombre *O* dont l'unité *o* eſt *p* priſe un nombre de fois & un nombre *Q* dont l'unité *q* eſt *r* priſe un nombre de fois ſont tels que *O* meſure *A*, que *Q* meſure *B*, que *o* eſt ſemblable à *q* & que *O Q* ſont premiers entre eux *par Theor. 95.* *P* eſt à *R* ce que *O* eſt à *Q par Theor. 115.* Donc *par Theor. 114.* *O* eſt à *Q* ce que *V* eſt à *Z*.

Or puiſque *P* eſt ſemblable à *Z*, *D* eſt meſurée par un nombre *X* dont l'unité *x* eſt z priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *x* eſt ſemblable à *o par Theor. 88. Cor. 2.* d'où il ſuit *par Theor. 88.* que *X* eſt ſemblable à *O* &

puisque *R* eſt ſemblable à *V*, *C* eſt meſurée par un nombre *S* dont l'unité *ſ* eſt *u* priſe un nombre de fois & qui eſt tel que *ſ* eſt ſemblable à *q* & que *S* eſt ſemblable à *Q*. *o* etant ſemblable à *q*, *x* eſt ſemblable à *ſ*, d'où il ſuit *par Theor.115.* que *V* eſt à *Z* ce que *S* eſt à *X* & *par Theor.114.* que *O* eſt à *Q* ce que *S* eſt à *X*.

Puiſque *O Q* ſont premiers entre eux, que *O* eſt ſemblable à *X* & *Q* ſemblable à *S*, ce que l'on vient de prouver fait donc voir que *O* eſt ſemblable à *Q*. *o* etant ſemblable à *q*, *P* eſt donc ſemblable à *R par Theor. 86.*

THEOREME CXXIV.

Si un nombre eſt à un autre ce qu'un troiſieme nombre eſt à un autre & que le premier ſoit ſemblable à un reſte du ſecond, le troiſieme eſt ſemblable à un reſte du quatrieme. Soit *p* l'unité d'un nombre *P* qui meſure la grandeur *A*, *ſ* l'unité d'un nombre *S* qui meſure la grandeur *B*, *u* l'unité d'un nombre *V* qui meſure la grandeur *C*, z l'unité d'un nombre *Z* qui meſure la grandeur *D*. Si *P* eſt à *S* ce que *V* eſt à *Z*, & que *P* ſoit ſemblable à un nombre dont *ſ* ſoit l'unité & qui meſure une partie de *B*, *V* eſt ſemblable à un nombre dont z eſt l'unité & qui meſure une partie de *D*.

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *P* dont *p* eſt l'unité & la grandeur *B* etant meſurée par le nombre *S* dont *ſ* eſt l'unité & la grandeur *C* etant meſurée par le nombre *V* dont *u* eſt

u eſt l'unité & la grandeur *D* etant meſurée par le nombre *Z* dont z eſt l'unité, ſuppoſons que *P S* ſoient premiers entre eux. Puiſque *P* eſt à *S* ce que *V* eſt à *Z*, un nombre *T* dont l'unité *t* eſt *u* priſe un nombre de fois & un nombre *X* dont l'unité *x* eſt z priſe un nombre de fois ſont tels que *T* meſure *C*, que *X* meſure *D*, que *T* eſt ſemblable à *P*, que *X* eſt ſemblable à *S* & que *t* eſt ſemblable à *x* *par Theor. 110.*

Puiſqu'une partie de *B* eſt meſurée par un nombre dont *ſ* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *P* & à *T*, une partie de *D* eſt donc meſurée par un nombre dont *x* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *T* *par Theor. 82.* Cette partie de *D* eſt eſt meſurée par un nombre *Y* dont z eſt l'unité *par Theor. 72.* & comme *x* eſt ſemblable à *t*, *Y* eſt ſemblable à *V* *par Theor. 86.*

Suppoſé que *P S* ne ſoient pas premiers entre eux. Un nombre *O* dont l'unité *o* eſt *p* priſe un nombre de fois & un nombre *Q* dont l'unité *q* eſt *ſ* priſe un nombre de fois ſont tels que *O* meſure *A*, que *Q* meſure *B*, que *o* eſt ſemblable à *q* & que *O Q* ſont premiers entre eux *par Theor. 95.* *P* eſt à *S* ce que *O* eſt à *Q* *par Theor. 115.* & *par Theor. 114.* *O* eſt à *Q* ce que *V* eſt à *Z*.

Une partie de *B* etant meſurée par un nombre dont *ſ* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *P*, cette partie de *B* eſt meſurée par un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *ſ* priſe un nombre de fois & qui

qui eſt tel que *r* eſt ſemblable à *o par Theor. 88. Cor. 2.* d'où il ſuit *par Theor. 88.* que *R* eſt ſemblable à *O*. *r* etant ſemblable à *o* & à *q* eſt le même que *q par Theor. 77. Cor.* *q* meſurant donc la grandeur meſurée par *r* eſt auſſi l'unité d'un nombre qui meſure cette partie de *B* & qui eſt ſemblable à *R par Theor. 76.* & par conſequent à *O*.

Or puiſqu'une partie de *B* eſt meſurée par un nombre dont *q* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *O* & que *O Q* ſont premiers entre eux, ce que l'on vient de prouver fait voir qu'une partie de *D* eſt meſurée par un nombre dont z eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *V*.

THEOREME CXXV.

Si de la ſomme de deux nombres & de la ſomme de deux autres nombres le premier eſt au troiſieme ce que le quatrieme eſt au ſecond & que le premier ſoit ſemblable à un reſte du troiſieme & à un reſte du quatrieme, la ſeconde ſomme eſt ſemblable à un reſte de la premiere. Soit la grandeur *A* epuiſée par les coordonnées *B C* & meſurée par un nombre *O* dont l'unité *ſ* ſoit l'unité d'un nombre *P* qui meſure *B* & d'un nombre *S* qui meſure *C*. Soit la grandeur *F* epuiſée par les coordonnées *G K* & meſurée par un nombre *T* dont l'unité z ſoit l'unité d'un nombre *V* qui meſure *G* & d'un nombre *Z* qui meſure *K*. Si *P* eſt à *V* ce que *Z* eſt à *S* & que *P* ſoit ſemblable à deux nombres qui ayent l'unité z

& dont

& dont l'un mesure une partie de *G* & l'autre une partie de *K*, *T* est semblable à un nombre dont *ſ* est l'unité & qui mesure une partie de *A*.

La grandeur *A* etant epuisée par les coordonnées *B C* & mesurée par le nombre *O* dont l'unité *ſ* est l'unité du nombre *P* qui mesure *B* & du nombre *S* qui mesure *C* & la grandeur *F* etant epuisée par les coordonnées *G K* & mesurée par le nombre *T* dont l'unité *z* est l'unité du nombre *V* qui mesure *G* & du nombre *Z* qui mesure *K*, puisque *P* est à *V* ce que *Z* est à *S* & que *P* est semblable à un nombre *x* dont *z* est l'unité & qui mesure *H* partie de *G*, *Z* est semblable à un nombre *q* dont *ſ* est l'unité & qui mesure *D* partie de *C* *par Theor. 124.*

G est epuisée par les coordonnées *H I* & *I* est mesurée par un nombre *y* dont *z* est l'unité *par Theor. 71.* *C* est epuisée par les coordonnées *D E* & *E* est mesurée par un nombre *r* dont *ſ* est l'unité.

P est à *Z* ce que *x* est à *q* *par Theor. 108. Cor. & 111.* Or *P* etant à *V* ce que *Z* est à *S*, *P* est à *Z* ce que *V* est à *S*. Donc *par Theor. 114.* *V* est à *S* ce que *x* est à *q* & par consequent *V* est à *x* ce que *S* est à *q*. *x* est donc à *y* ce que *q* est à *r* *par Theor. 113.* d'où il suit que *x* est à *q* ce que *y* est à *r* & que *P* est à *Z* ce que *y* est à *r*. Or puisque *P* est semblable à un nombre dont *z* est l'unité & qui mesure une partie de *K*, *y* est semblable à un nombre

dont

dont ſ eſt l'unité & qui meſure une partie de *E* *par Theor. 124.*

A etant epuiſée par *BDE* & *F* etant epuiſée par *KHI*, puiſque *P* qui meſure *B* eſt ſemblable à *x* qui meſure *H*, que *Z* qui meſure *K* eſt ſemblable à *q* qui meſure *D* & que *y* qui meſure *I* eſt ſemblable à un nombre dont ſ eſt l'unité & qui meſure une partie de *E*, il s'enſuit *par Theor. 83.* qu'une partie de *A* eſt meſurée par un nombre dont ſ eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *T.*

THEOREME CXXVI.

De deux nombres qui meſurent une même grandeur & de deux autres nombres qui meſurent une même grandeur le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, ſi le premier & le troiſieme ont une même unité & que le ſecond & le quatrieme ayent une même unité. Soit *p* l'unité d'un nombre *O* qui meſure la grandeur *A* & d'un nombre *P* qui meſure la grandeur *B.* Soit *t* l'unité d'un nombre *S* qui meſure *A* & d'un nombre *T* qui meſure *B*. *O* eſt à *S* ce que *P* eſt à *T.*

La grandeur *A* etant meſurée par le nombre *O* dont l'unité *p* eſt l'unité du nombre *P* qui meſure la grandeur *B* & par le nombre *S* dont l'unité *t* eſt l'unité du nombre *T* qui meſure *B*, un nombre *N* dont l'unité *n* eſt *p* priſe un nombre de fois & un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *t* priſe un nombre de fois meſurent *A* &

ſont

ſont tels que *n* eſt ſemblable à *r* & que *NR* ſont premiers entre eux *par Theor. 96. Cor.* Par conſequent deux nombres *Y Z* qui ont la même unité z ſont tels que *Z* qui eſt ſemblable à *N* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *S* & que *Y* qui eſt ſemblable à *R* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *O* *par Theor. 106.* La grandeur meſurée par *Z* eſt egale à la grandeur meſurée par *t*, *par Theor. 79.* & la grandeur meſurée par *Y* eſt egale à la grandeur meſurée par *p*.

Si z meſure la grandeur meſurée par *Z* & la grandeur meſurée par *Y*, la grandeur meſurée par *t* eſt donc egale à la grandeur meſurée par *p*. *O* eſt donc ſemblable à *S* *par Theor. 76.* & *P* eſt ſemblable à *T*, d'où il ſuit *par Theor. 108. Cor.* que *O* eſt à *S* ce que *P* eſt à *T*.

Si z meſure la grandeur meſurée par *Z* & une partie de la grandeur meſurée par *Y*, la grandeur meſurée par z eſt egale à la grandeur meſurée par *t* & *Y* meſure la grandeur meſurée par *p* *par Theor. 67.* *Y* eſt donc l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *P*. z eſt l'unité d'un nombre *V* qui meſure *A* *par Theor. 72.* & l'unité d'un nombre *X* qui meſure *B*. *O* eſt donc à *P* ce que *V* eſt à *X* *par Theor. 115.* Or puiſque *par Theor. 76.* *V* eſt ſemblable à *S* & *X* ſemblable à *T*, *V* eſt à *X* ce que *S* eſt à *T* *par Theor. 108. Cor. & 111.* Donc *par Theor. 114.* *O* eſt à *P* ce que *S* eſt à *T* & par conſequent *O* eſt à *S* ce que *P* eſt à *T*.

Si

Si *z* mesure une partie de la grandeur mesurée par *Y* & une partie de la grandeur mesurée par *Z*, *Y* mesure la grandeur mesurée par *p* & *Z* mesure la grandeur mesurée par *t*. *Y* est donc l'unité d'un nombre qui mesure *B* & qui est semblable à *P* & *Z* est l'unité d'un nombre qui mesure *B* & qui est semblable à *T*. *P* est donc à *T* ce que *Z* est à *Y* *par Theor. 120.* Or *O* est à *S* ce que *N* est à *R* *par Theor. 115.* & *N* est à *R* ce que *Z* est à *Y* *par Theor. 108. Cor. & 111.* Donc *par Theor. 114.* *O* est à *S* ce que *Z* est à *Y* & par conséquent *O* est à *S* ce que *P* est à *T*.

THEOREME CXXVII.

Si de trois nombres le premier est au second ce qu'un nombre multiplié est à un autre & que le second soit au troisieme ce que le premier multiplicateur est au second, le premier est au troisieme ce que le premier produit est au second. Soit *h* l'unité d'un nombre *H* qui mesure la grandeur *A*, *l* l'unité d'un nombre *L* qui mesure la grandeur *B*, *n* l'unité d'un nombre *N* qui mesure la grandeur *C*. Soit la grandeur *D* mesurée par un nombre *S* dont *ſ* soit l'unité & par un nombre *Q* dont l'unité *q* soit *ſ* prise un nombre de fois. Soit la grandeur *E* mesurée par un nombre *Z* dont *z* soit l'unité & par un nombre *X* dont l'unité *x* soit *z* prise un nombre de fois. Si *H* est à *L* ce que *q* est à *x* & que *L* soit à *N* ce que *Q* est à *X*, *H* est à *N* ce que *S* est à *Z*.

La

La grandeur A etant meſurée par le nombre H dont h eſt l'unité & la grandeur B etant meſurée par le nombre L dont l eſt l'unité & la grandeur C etant meſurée par le nombre N dont n eſt l'unité, la grandeur D etant auſſi meſurée par le nombre S dont $ſ$ eſt l'unité & par le nombre Q dont l'unité q eſt $ſ$ priſe un nombre de fois & la grandeur E etant meſurée par le nombre Z dont z eſt l'unité & par le nombre X dont l'unité x eſt z priſe un nombre de fois, ſuppoſons que $q\,x$ ſoient premiers entre eux & que $Q\,X$ ſoient auſſi premiers entre eux. Puisque H eſt à L ce que q eſt à x, un nombre G dont l'unité g eſt h priſe un nombre de fois & un nombre I dont l'unité i eſt l priſe un nombre de fois ſont tels que G meſure A, que I meſure B, que G eſt ſemblable à q, que I eſt ſemblable à x & que g eſt ſemblable à i *par Theor. 110.* & puisque L eſt à N ce que Q eſt à X, un nombre K dont l'unité k eſt l priſe un nombre de fois & un nombre M dont l'unité m eſt n priſe un nombre de fois ſont tels que K meſure B, que M meſure C, que K eſt ſemblable à Q, que M eſt ſemblable à X & que k eſt ſemblable à m. G eſt donc à M ce que q eſt à X *par Theor. 108. Cor. & 111.* & I eſt à K ce que x eſt à Q. Or I eſt à K ce que k eſt à i *par Theor. 120.* d'où il ſuit que I eſt à K ce que m eſt à g. Donc *par Theor. 114.* g eſt à m ce que Q eſt à x. D eſt meſurée par un nombre P dont l'unité p eſt $ſ$ priſe un nombre de fois & qui eſt tel que P eſt ſemblable

à *q* & que *p* est semblable à *Q* *par Theor. 85.* *G* est donc à *M* ce que *P* est à *X* & *g* est à *m* ce que *p* est à *x*, d'où il suit *par Theor. 118.* que *H* est à *N* ce que *S* est à *Z*.

Supposé que *QX* etant premiers entre eux, *q x* ne soient pas premiers entre eux. Un nombre *R* dont l'unité *r* est *f* prise un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* est z prise un nombre de fois sont tels que *R* mesure la grandeur mesurée par *q*, que *Y* mesure la grandeur mesurée par *x*, que *r* est semblable à *y* & que *R Y* sont premiers entre eux *par Theor. 95.* Or *par Theor. 115.* *q* est à *x* ce que *R* est à *Y* & *H* etant à *L* ce que *q* est à *x*, *H* est à *L* ce que *R* est à *Y*. *R* est l'unité d'un nombre qui mesure *D* & qui est semblable à *Q* *par Theor. 89 & 76.* & *r* est l'unité d'un nombre *O* qui mesure *D* *par Theor. 72.* *Y* est aussi l'unité d'un nombre qui mesure *E* & qui est semblable à *X* & *y* est l'unité d'un nombre *V* qui mesure *E*. Le nombre qui mesure *D* & dont *R* est l'unité & le nombre qui mesure *E* & dont *Y* est l'unité sont premiers entre eux *par Theor. 96.* Il paroit donc par le cas precedent que *H* est à *N* ce que *O* est à *V*. Or *par Theor. 115.* *O* est à *V* ce que *S* est à *Z*. Donc *H* est à *N* ce que *S* est à *Z*.

Supposé que *q x* etant premiers entre eux, *QX* ne soient pas premiers entre eux. *D* est mesurée par le nombre *P* dont l'unité *p* est *f* prise un nombre de fois & qui est tel que *P* est sem-

ſemblable à q & que p eſt ſemblable à Q, E eſt auſſi meſurée par un nombre T dont l'unité t eſt z priſe un nombre de fois & qui eſt tel que T eſt ſemblable à x & que t eſt ſemblable à X. P T ſont premiers entre eux & p t ne ſont pas premiers entre eux. Il paroit donc par le cas precedent que H eſt à N ce que S eſt à Z.

Suppoſé que q x n'etant pas premiers entre eux, Q X ne ſoient pas non plus premiers entre eux. On trouvera comme dans le ſecond cas que R meſure la grandeur meſurée par q, que Y meſure la grandeur meſurée par x, que O meſure D & que V meſure E, mais que le nombre qui meſure D & dont R eſt l'unité & le nombre qui meſure E & dont Y eſt l'unité ne ſont pas premiers entre eux. Il paroit donc par le troiſieme cas que H eſt à N ce que O eſt à V, d'où il ſuit que H eſt à N ce que S eſt à Z.

THEOREME CXXVIII.

Si de pluſieurs nombres le premier eſt au ſecond ce que le quatrieme eſt au cinquieme & que le ſecond ſoit au troiſieme ce que le cinquieme eſt au ſixieme, le premier eſt au troiſieme ce que le quatrieme eſt au ſixieme. Soit l l'unité d'un nombre L qui meſure la grandeur A, o l'unité d'un nombre O qui meſure la grandeur B, q l'unité d'un nombre Q qui meſure la grandeur C, $ſ$ l'unité d'un nombre S qui meſure la grandeur D, x l'unité d'un nombre X qui meſure la grandeur E, z l'unité d'un nombre Z qui meſure la gran-

deur *F*. Si *L* eſt à *O* ce que *S* eſt à *X* & que *O* ſoit à *Q* ce que *X* eſt à *Z*, *L* eſt à *Q* ce que *S* eſt à *Z*.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *l* eſt l'unité du nombre *L* qui meſure *A*, que *o* eſt l'unité du nombre *O* qui meſure *B* & que *q* eſt l'unité du nombre *Q* qui meſure *C*, un nombre *K* dont l'unité *k* eſt *l* priſe un nombre de fois & un nombre *M* dont l'unité *m* eſt *o* priſe un nombre de fois ſont tels que *K* meſure *A*, que *M* meſure *B*, que *K* eſt ſemblable à *M* & que *k m* ſont premiers entre eux *par Theor. 96. Cor. & 85.* Un nombre *N* dont l'unité *n* eſt *o* priſe un nombre de fois & un nombre *P* dont l'unité *p* eſt *q* priſe un nombre de fois ſont tels que *N* meſure *B*, que *P* meſure *C*, que *N* eſt ſemblable à *P* & que *n p* ſont premiers entre eux. Les grandeurs *D E F* etant telles que *ſ* eſt l'unité d'un nombre *S* qui meſure *D*, que *x* eſt l'unité d'un nombre *X* qui meſure *E* & que *z* eſt l'unité d'un nombre *Z* qui meſure *F*, un nombre *R* dont l'unité *r* eſt *ſ* priſe un nombre de fois & un nombre *T* dont l'unité *t* eſt *x* priſe un nombre de fois ſont tels que *R* meſure *D*, que *T* meſure *E*, que *R* eſt ſemblable à *T* & que *r t* ſont premiers entre eux. Un nombre *V* dont l'unité *u* eſt *x* priſe un nombre de fois & un nombre *Y* dont l'unité *y* eſt *z* priſe un nombre de fois ſont tels que *V* meſure *E*, que *Y* meſure *F*, que *V* eſt ſemblable à *Y* & que *u y* ſont premiers entre eux.

L eſt

L eſt à *O* ce que *k* eſt à *m* *par Theor. 116.* & *S* eſt à *X* ce que *r* eſt à *t*. *L* etant à *O* ce que *S* eſt à *X*, *k* eſt donc à *m* ce que *r* eſt à *t* *par Theor. 114.* d'où il ſuit *par Theor. 110. Cor.* que *k* eſt ſemblable à *r* & que *m* eſt ſemblable à *t*. Par la même raiſon *O* eſt à *Q* ce que *n* eſt à *p* & *X* eſt à *Z* ce que *u* eſt à *y*. *O* etant à *Q* ce que *X* eſt à *Z*, *n* eſt à *p* ce que *u* eſt à *y*, d'où il ſuit que *n* eſt ſemblable à *u* & que *p* eſt ſemblable à *y*.

Or *par Theor. 120.* *m* eſt à *n* ce que *N* eſt à *M* & par conſequent *t* eſt à *u* ce que *P* eſt à *K*. Or *t* eſt à *u* ce que *V* eſt à *T*, ce que *Y* eſt à *R*. *K* eſt donc à *P* ce que *R* eſt à *Y* & puiſque *k* eſt à *p* ce que *r* eſt à *y*, il s'enſuit *par Theor. 118.* que *L* eſt à *Q* ce que *S* eſt à *Z*.

COROLLAIRE.

Si *L* eſt à *O* ce que *X* eſt à *Z* & que *O* ſoit à *Q* ce que *S* eſt à *X*, *k* ſera ſemblable à *u* & *m* ſera ſemblable à *y*, *n* ſera ſemblable à *r* & *p* ſera ſemblable à *t*. *m* etant à *n* ce que *N* eſt à *M*, *y* ſera donc à *r* ce que *P* eſt à *K* & *t* etant à *u* ce que *V* eſt à *T*, *p* ſera à *k* ce que *Y* eſt à *R*. Il paroit donc *par Theor. 85 & 118.* que *L* eſt à *Q* ce que *S* eſt à *Z*. Si de pluſieurs nombres le premier eſt au ſecond ce que le cinquieme eſt au ſixieme & que le ſecond ſoit au troiſieme ce que le quatrieme eſt au cinquieme, le premier eſt au troiſieme ce que le quatrieme eſt au ſixieme.

LEMME.

Soient *A* & *B* deux grandeurs egales ou inegales. Soit *O* une grandeur telle que *A* ſoit egale à *O* ou plus grande que *O*. Si *O* n'eſt pas meſurée par une unité de *A*, il paroit *par Theor. 51. Cor. & 59.* que *A* eſt epuiſée par des coordonnées toutes egales à *O* excepté une que nous appellerons *P* qui eſt moindre que *O*. Si *P* n'eſt pas meſurée par une unité de *A*, *A* eſt encore epuiſée par des coordonnées toutes egales à *P* excepté une qui eſt moindre que *P*. Suppoſé donc que quelque partie de *A* que l'on conſidere, l'on entende par *R* une grandeur qui etant egale à *A* ou moindre que *A* ne ſoit pas plus grande que cette partie de *A*. *A* eſt meſurée par un nombre dont l'unité meſure *R*. *B* qui n'eſt pas moindre que *R* eſt auſſi meſurée par un nombre dont l'unité meſure *R*, d'où il ſuit qu'une meſure de *R* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & d'un nombre qui meſure *B*. Nous appellerons ces nombres des nombres rationnels. Le nombre *rationnel* eſt un nombre qui meſure une grandeur dont aucune partie n'eſt moindre que la grandeur meſurée par l'unité de ce nombre. La grandeur meſurée par l'unité d'un nombre rationnel eſt l'*element* de la grandeur que ce nombre meſure.

COROLLAIRE I.

Suppoſé que les grandeurs *A B C* ſoient egales ou inegales. Deux nombres rationnels qui ont la même unité ſont tels que l'un meſure *A* & que

& que l'autre mesure *B*. *B* & *C* sont aussi mesurées par deux nombres rationnels qui ont la même unité & comme les unitez des nombres rationnels qui mesurent la même grandeur mesurent des grandeurs egales, il paroit *par Theor.* 51. *Cor.* que des nombres rationnels *a b c* qui ont la même unité sont tels que *a* mesure *A*, que *b* mesure *B*, que *c* mesure *C*. Les grandeurs qui sont egales ou inegales sont mesurées par des nombres rationnels qui ont la même unité.

COROLLAIRE II.

Supposé que les grandeurs *A B* etant egales, le nombre rationnel *a* mesure *A* & le nombre rationnel *b* mesure *B*. *A* ou une partie de *A* etant egale à la grandeur mesurée par l'unité de *b*, cette grandeur n'est pas moindre que la grandeur mesurée par l'unité de *a* & les grandeurs mesurées par les unitez de *a* & de *b* etant egales, il s'ensuit *par Theor.* 76. que *a* est semblable à *b*. Les nombres rationnels qui mesurent des grandeurs egales sont des nombres semblables.

COROLLAIRE III.

Soient les grandeurs *A R B* telles que *R* soit l'element de *A* & de *B*. Une mesure de *R* est l'unité d'un nombre rationnel qui mesure *A*, d'où il suit que *A R* sont egales ou inegales. Par la même raison *R B* sont egales ou inegales. Donc *par Theor.* 64. *A B* sont egales ou inegales. Les grandeurs qui ont le même element sont egales ou inegales.

COROLLAIRE IV.

Soient *A B* des grandeurs telles que *B* ſoit epuiſée par les coordonnées *C D*. Par le premier Corollaire, des nombres rationnels *b c d* qui ont la même unité ſont tels que *b* meſure *B*, que *c* meſure *C* & que *d* meſure *D*. Or puiſque l'unité de *b* & de *c* eſt auſſi l'unité de *d*, il eſt evident que *b* n'eſt pas ſemblable à *c*, d'où il ſuit par le ſecond Corollaire que *B* n'eſt meſurée par aucun nombre rationnel qui ſoit ſemblable à *c*. Suppoſé donc que *A* & *B* ſoient meſurées par le nombre rationnel *a*. Puiſque *a* n'eſt point ſemblable à *c*, *A* n'eſt pas egale à *C* & comme l'on prouvera de même que *B* n'eſt point egale à une partie de *A*, il s'enſuit par le troiſieme Corollaire que *A* eſt egale à *B*. Les grandeurs meſurées par le même nombre rationnel ſont egales entre elles.

COROLLAIRE V.

Soit *a* un nombre rationnel qui meſure la grandeur *A*. Si *C* eſt une partie de *A*, l'unité de *a* meſure une partie de *A*. Suppoſé donc que la grandeur meſurée par l'unité de *a* ſoit egale à *C*, l'unité de *a* meſure *C* *par Theor. 69.* & ſuppoſé que la grandeur meſurée par l'unité de *a* ſoit moindre que *C*, toute partie de *C* qui eſt egale à la grandeur meſurée par l'unité de *a* eſt meſurée par cette unité, d'où il ſuit *par Theor. 59 & 61.* que *C* eſt meſurée par un nombre qui a l'unité de *a*. La partie d'une grandeur eſt meſurée par un nombre qui a l'unité du nombre rationnel qui meſure cette grandeur.

COROL-

COROLLAIRE VI.

Soit *Y* un nombre qui mesure la grandeur *A*, *Z* un nombre qui mesure la grandeur *B*. Soient *a b* deux nombres rationnels tels que *a* mesure *A* & que *b* mesure *B*. Si l'unité de *Y* mesure des coordonnées qui epuisent *A*, il paroit par le cinquieme Corollaire, par le second & *par Theor.* 77. *Cor. 61 & 76.* qu'un nombre qui a l'unité de *a* est l'unité d'un nombre qui mesure *A* & qui est semblable à *Y*. Et si l'unité de *Y* mesure *A*, *a* & par consequent un nombre qui a l'unité de *a* est l'unité d'un nombre qui mesure *A* & qui est semblable à *Y*. Par la même raison, un nombre qui a l'unité de *b* est l'unité d'un nombre qui mesure *B* & qui est semblable à *Z*. Si donc *Y* & *Z* ont la même unité, il s'ensuit *par Theor. 79 & 115.* que *a* est à *b* ce que *Y* est à *Z*. Si deux nombres ont la même unité, l'un est à l'autre ce que le nombre rationnel qui mesure la grandeur mesurée par le premier est au nombre rationnel qui mesure la grandeur mesurée par le second.

COROLLAIRE VII.

Soit *R* l'element de la grandeur *A*. *A R* etant egales ou inegales, il s'ensuit par le premier Corollaire que deux nombres rationnels *a r* qui ont la même unité sont tels que *a* mesure *A* & que *r* mesure *R*. Or les unitez des nombres rationnels qui mesurent *A* mesurent des grandeurs egales. *R* etant mesurée par l'unité d'un nombre rationnel qui mesure *A*, l'unité de *r* ne mesure donc pas une partie de *R* & par consequent l'unité

de *r* mesure *R*. Si *ſ* est un nombre rationnel qui mesure *R*, l'unité de *ſ* mesure donc aussi *R*. L'Element est mesuré par l'unité du nombre rationnel qui le mesure.

COROLLAIRE VIII.

Soient *A B R* des grandeurs telles que *A B* soient egales ou inegales & que *R* soit l'element de *A*. *A R* etant egales ou inegales, *B R* sont egales ou inegales *par Theor. 64*. Donc par le premier Corollaire deux nombres rationnels *b r* qui ont la même unité sont tels que *b* mesure *B* & que *r* mesure *R*. Or par le septieme Corollaire l'unité de *r* mesure *R* & par consequent *R* est l'element de *B*. L'Element d'une grandeur est element de la grandeur egale ou inegale à celle là.

COROLLAIRE IX.

Soit *R* l'element de la grandeur *A*. Soient *S T* deux grandeurs telles que *S* soit egale à *R* ou moindre que *R* & que *T* soit moindre que *S*. Il paroit par le Lemme qu'une grandeur *V* est l'element de *S* & de *T*. Or puisque *S* a des parties, on voit par le cinquieme Corollaire que *V* n'est pas egal à *R*, d'où il suit que *V* n'est pas element de *A*. *V* est ce qu'on appelle un second element de *A*. Si l'element d'une grandeur egale ou surpasse la plus grande de deux autres grandeurs, ces deux grandeurs ont un même element qui n'est pas element de la premiere, mais *second* element de cette premiere grandeur.

SCHOLIE.

La circonference du Cercle eſt meſurée par le contour rationnel d'un polygone inſcrit, & une ligne droite qui ne ſurpaſſe aucune partie de la circonference en eſt l'element.

La Coupée & l' Appliquée d'une Courbe etant des grandeurs egales ou inegales ont le même element. Mais par un raiſonnement ſemblable à celui du Lemme on trouve que toute appliquée eſt telle, que la difference de cette appliquée & d'une autre n'eſt pas plus grande que l'element & que la difference des coupées correſpondantes n'eſt auſſi pas plus grande que l'element. L'une & l'autre difference eſt donc egale à l'element ou moindre que l'element. L'une eſt la differentielle de l'appliquée. L'autre eſt la differentielle de la coupée. Ces deux differentielles ont donc un element qui leur eſt commun ſoit qu'elles ſoient egales ou inegales & dans le ſecond cas cet element eſt un ſecond element de l'appliquée & de la coupée.

Que ſi la differentielle de la coupée etant conſtante donne à l'appliquée une differentielle variable, les appliquées auront des differentielles inegales dont l'element par conſequent ſera un ſecond element de l'appliquée & de la coupée. On trouvera donc auſſi que la differentielle de toute appliquée eſt telle que la difference de cette differentielle & de la differentielle d'une autre appliquée eſt egale au ſecond element ou moindre

que

que cet element. La difference des differentielles de ces deux appliquées eſt la ſeconde differentielle de l'appliquée.

DEFINITION XI.

Une grandeur *eſt à* une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre, ſi le nombre rationnel qui meſure la premiere ayant la même unité que celui qui meſure la ſeconde & le nombre rationnel qui meſure la troiſieme ayant la même unité que celui qui meſure la quatrieme, le premier de ces nombres eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme. Soient $ABCD$ des grandeurs. Soient $a\,b\,c\,d$ des nombres rationnels tels que $a\,b$ ayent la même unité, que $c\,d$ ayent auſſi la même unité, que a meſure A, que b meſure B, que c meſure C & que d meſure D. Si a eſt à b ce que c eſt à d, A eſt à B ce que C eſt à D.

THEOREME CXXIX.

Si de quatre grandeurs la ſeconde n'ayant aucune partie qui n'egale ou ne ſurpaſſe une grandeur meſurée par une unité de la premiere & la quatrieme n'ayant aucune partie qui n'egale ou ne ſurpaſſe une grandeur meſurée par une unité de la troiſieme, tout nombre qui meſure la premiere eſt ſemblable à un nombre qui meſure la troiſieme & tout nombre qui meſure la troiſieme eſt ſemblable à un nombre qui meſure la premiere & que l'unité de tout nombre qui meſure la premiere ſoit l'unité d'un

d'un nombre qui mesure la seconde ou une partie qui epuise la seconde avec une coordonnée moindre que la grandeur mesurée par cette unité & que l'unité du nombre qui etant semblable au premier mesure la troisieme soit l'unité d'un nombre qui etant semblable au second mesure la quatrieme ou une partie qui epuise la quatrieme avec une coordonnée moindre que la grandeur mesurée par cette unité, la premiere grandeur est à la seconde ce que la troisieme est à la quatrieme. Soient *A B C D* des grandeurs telles que *B* n'ait point de partie qui n'egale ou ne surpasse une grandeur mesurée par une unité de *A*, que *D* n'ait point de partie qui n'egale ou ne surpasse une grandeur mesurée par une unité de *C*, que tout nombre qui mesure *A* soit semblable à un nombre qui mesure *C* & que tout nombre qui mesure *C* soit semblable à un nombre qui mesure *A*. Si l'unité de tout nombre qui mesure *A* est l'unité d'un nombre qui mesure *B* ou une partie qui epuise *B* avec une coordonnée moindre que la grandeur mesurée par cette unité & que l'unité du nombre qui etant semblable au premier mesure *C* soit l'unité d'un nombre qui etant semblable au second mesure *D* ou une partie qui epuise *D* avec une coordonnée moindre que la grandeur mesurée par cette unité, *A* est à *B* ce que *C* est à *D*.

Les grandeurs *A B C D* etant telles que *B* n'a point de partie qui ne soit egale à une grandeur mesurée par une unité de *A* ou qui ne soit plus grande qu'une telle grandeur & l'unité de

tout

tout nombre qui meſure *A* etant l'unité d'un nombre qui meſure *B* ou une partie de *B*, il paroit par le Lemme que *B* eſt meſurée par un nombre rationnel *b* dont l'unité eſt l'unité d'un nombre *a* qui meſure *A*. *B* n'ayant point de partie qui ſoit moindre que la grandeur meſurée par l'unité de *b* & de *a*, *A* n'a donc auſſi point de partie qui ſoit moindre que la grandeur meſurée par l'unité de *a* & par conſequent *a* eſt un nombre rationnel.

Tout nombre qui meſure *A* etant ſemblable à un nombre qui meſure *C*, *a* eſt ſemblable au nombre *c* qui meſure *C* & puisque tout nombre qui meſure *C* eſt ſemblable à un nombre qui meſure *A* & que *A* n'eſt pas meſurée par un nombre dont l'unité meſure une grandeur moindre que la grandeur meſurée par l'unité de *a*, il s'enſuit que *C* n'eſt pas meſurée par un nombre dont l'unité meſure une grandeur moindre que la grandeur meſurée par l'unité de *c*. Or l'unité de tout nombre qui meſure *C* & qui eſt par conſequent ſemblable à un nombre qui meſure *A*, etant l'unité d'un nombre qui meſure *D* ou une partie de *D*, l'unité de *c* eſt l'unité d'un nombre *d* qui meſure *D* ou une partie de *D*. *D* n'ayant point de partie qui n'egale ou ne ſurpaſſe une grandeur meſurée par une unité de *C*, *C* n'a donc point de partie qui ſoit moindre que la grandeur meſurée par l'unité de *c* & par conſequent *c* eſt un nombre rationnel.

D n'a

D n' a donc auſſi point de partie qui ſoit moindre que la grandeur meſurée par l'unité de *d* & par conſequent *d* eſt un nombre rationnel & puisque l'unité de tout nombre qui meſure *A* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* ou une partie qui epuiſe *B* avec une coordonnée moindre que la grandeur meſurée par cette unité & que l'unité du nombre qui etant ſemblable au premier meſure *C* eſt l'unité d'un nombre qui etant ſemblable au ſecond meſure *D* ou une partie qui epuiſe *D* avec une coordonnée moindre que la grandeur meſurée par cette unité, *b* eſt ſemblable à *d*.

Or *a* etant ſemblable à *c* & *b* etant ſemblable à *d*, *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d* *par Theor. 108. Cor. & 111.* Donc *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*.

EXEMPLE. Suppoſé deux Baſſins qui ſoient ronds & d'une egale profondeur & dont le ſecond contienne deux, trois, quatre fois autant d'eau que le premier. Suppoſé auſſi deux lignes qui ſoient telles que tout nombre dont l'unité eſt une unité du diametre du premier baſſin & qui meſure ou le diametre du ſecond baſſin ou une partie qui epuiſe ce diametre avec une coordonnée moindre que la grandeur meſurée par cette unité, ſoit ſemblable à un nombre dont l'unité ſoit une unité de la premiere ligne & qui meſure ou la ſeconde ligne ou une partie qui epuiſe cette ligne avec une coordonnée moindre que la grandeur meſurée par cette unité. Si ce nombre qui meſure

mesure le premier diametre est semblable à ce nombre qui mesure la premiere ligne, le diametre du premier bassin est au diametre du second ce que la premiere ligne est à la seconde.

THEOREME CXXX.

Si deux grandeurs etant mesurées par des nombres qui ayent la même unité & deux autres grandeurs etant aussi mesurées par des nombres qui ayent la même unité, le premier de ces nombres est au second ce que le troisieme est au quatrieme, la premiere grandeur est à la seconde ce que la troisieme est à la quatrieme. Soient *ABCD* des grandeurs. Soient *VXYZ* des nombres tels que *VX* ayent la même unité, que *YZ* ayent la même unité, que *V* mesure *A*, que *X* mesure *B*, que *Y* mesure *C*, que *Z* mesure *D*. Si *V* est à *X* ce que *Y* est à *Z*, *A* est à *B* ce que *C* est à *D*.

Les nombres *VX* qui ont la même unité etant tels que *V* mesure la grandeur *A* & que *X* mesure la grandeur *B*, *A* & la grandeur mesurée par l'unité de *V* sont egales ou inegales, *B* & cette même grandeur sont aussi egales ou inegales, d'où il suit *par Theor. 64.* que *AB* sont egales ou inegales. Ainsi par le premier Corollaire du Lemme deux nombres rationnels *ab* qui ont la même unité sont tels que *a* mesure *A* & que *b* mesure *B*. *Y* & *Z* etant aussi des nombres qui ont la même unité & tels que *Y* mesure la grandeur

deur *C* & que *Z* meſure la grandeur *D*, deux nombres rationnels *c d* qui ont la même unité ſont tels que *c* meſure *C* & que *d* meſure *D*.

Or par le ſixieme Corollaire du Lemme *V* eſt à *X* ce que *a* eſt à *b* & *Y* eſt à *Z* ce que *c* eſt à *d*. *V* etant à *X* ce que *Y* eſt à *Z*, il s'enſuit *par Theor. 114.* que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d*. Donc *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*.

COROLLAIRE I.

Si *A* eſt egale à *B* & que *C* ſoit egale à *D*, *V* eſt ſemblable à *X par Theor. 76.* & *Y* eſt ſemblable à *Z*, d'où il ſuit *par Theor. 108. Cor.* que *V* eſt à *X* ce que *Y* eſt à *Z*. *A* eſt donc à *B* ce que *C* eſt à *D*. Si deux grandeurs ſont egales & que deux autres grandeurs ſoient auſſi egales, la premiere eſt à la ſeconde ce que la troiſieme eſt à la quatrieme.

COROLLAIRE II.

Si *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*, *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d*, d'où il ſuit par le ſixieme Corollaire du Lemme que *V* eſt à *X* ce que *Y* eſt à *Z*. Si une grandeur etant à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre, les deux premieres ſont meſurées par des nombres qui ayent la même unité & que les deux autres ſoient auſſi meſurées par des nombres qui ayent la même unité, celui de ces nombres qui meſure la premiere grandeur eſt à celui qui meſure la ſeconde ce que celui qui meſure la troiſieme eſt à celui qui meſure la quatrieme.

COROLLAIRE III.

Soit *R* l'element de *A*. Si *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *R*, *A* eſt le produit de *B* multipliée par *C*. Une grandeur eſt le ***produit*** d'une autre multipliée par une troiſieme ſi la premiere eſt à la ſeconde ce que la troiſieme eſt à l'element de la premiere.

SCHOLIE.

Un Rectangle eſt le produit de la baſe multipliée par la hauteur ſi l'on conçoit ces deux lignes comme un Gnomon ou une Equerre. La partie commune aux deux regles de l'equerre eſt l'element du rectangle. Un Parallelepipede eſt auſſi le produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur ſi l'on conſidere cette ſurface & cette ligne comme ayant quelque ſolidité. La partie commune à cette ſurface ſolide & à cette ligne ſolide eſt l'element du parallelepipede.

THEOREME CXXXI.

Une grandeur etant à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre, ſi la premiere & la ſeconde ont une même unité, la troiſieme & la quatrieme ont une même unité. Soient *ABCD* des grandeurs telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à *D*. Soient *TX* deux nombres qui ayent la même unité. Si *T* meſure *A* & que *X* meſure *B*, *C* & *D* ont une même unité.

Les grandeurs *ABCD* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*, deux nombres rationnels *ab* qui ont la même unité & deux nombres ration-

rationnels *c d* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, que *c* meſure *C*, que *d* meſure *D* & que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d* & puisque les nombres *T X* qui ont la même unité ſont tels que *T* meſure *A* & que *X* meſure *B*, il paroit par le ſixieme Corollaire du Lemme que *T* eſt à *X* ce que *a* eſt à *b*, d'où il ſuit *par Theor. 114.* que *T* eſt à *X* ce que *c* eſt à *d*.

Suppoſé que *T X* ſoient premiers entre eux, un nombre *Y* dont l'unité eſt l'unité de *c* priſe un nombre de fois & un nombre *Z* qui a l'unité de *Y* ſont tels que *Y* meſure *C*, que *Z* meſure *D*, que *Y* eſt ſemblable à *T* & que *Z* eſt ſemblable à *X par Theor. 110. & 77. Cor.*

Suppoſé que *T X* ne ſoient pas premiers entre eux, un nombre *S* dont l'unité eſt l'unité de *T* priſe un nombre de fois & un nombre *V* qui a l'unité de *S* ſont tels que *S* meſure *A*, que *V* meſure *B* & que *S V* ſont premiers entre eux *par Theor. 95.* Donc *par Theor. 115.* *S* eſt à *V* ce que *T* eſt à *X*, ce que *c* eſt à *d*. Ce que l'on vient de prouver fait donc voir que *C* & *D* ont une même unité.

THEOREME CXXXII.

Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que les deux premieres ſoient egales, les deux autres le ſont auſſi. Soient *A B C D* des grandeurs telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à *D*. Si *A* eſt egale à *B*, *C* eſt egale à *D*.

Les grandeurs *A B C D* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*, deux nombres rationnels *a b* qui ont la même unité & deux nombres rationnels *c d* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, que *c* meſure *C*, que *d* meſure *D* & que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d*. Or *A* etant egale à *B*, *a* par le ſecond Corollaire du Lemme eſt ſemblable à *b*, d'où il ſuit *par Theor. 109.* que *c* eſt ſemblable à *d*. Donc *par Theor. 77. Cor.* *c* eſt le même que *d*, d'où il ſuit par le quatrieme Corollaire du Lemme que *C* eſt egale à *D*.

THEOREME CXXXIII.

Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que la premiere & la troiſieme ſoient egales ou inegales, la premiere eſt à la troiſieme ce que la ſeconde eſt à la quatrieme. Soient *A B C D* des grandeurs telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à *D*. Si *A C* ſont egales ou inegales, *A* eſt à *C* ce que *B* eſt à *D*.

Les grandeurs *A B C D* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*, deux nombres rationnels *a b* qui ont la même unité & deux nombres rationnels *c d* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, que *c* meſure *C*, que *d* meſure *D* & que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d*, d'où il ſuit *par Theor. 111.* que *a* eſt à *c* ce que *b* eſt à *d*.

Or

Or par le troiſieme Corollaire du Lemme *AB* ſont egales ou inegales & *CD* ſont egales ou inegales. *AC* etant egales ou inegales, *BD* ſont donc egales ou inegales *par Theor. 64*. Ainſi par le premier Corollaire du Lemme des nombres rationnels *o p q r* qui ont la même unité ſont tels que *o* meſure *A*, que *p* meſure *B*, que *q* meſure *C* & que *r* meſure *D* & par le ſecond Corollaire du Lemme *a* eſt ſemblable à *o*, *b* eſt ſemblable à *p*, *c* eſt ſemblable à *q* & *d* eſt ſemblable à *r*. Donc *par Theor. 108. Cor. & 111.* *a* eſt à *c* ce que *o* eſt à *q* & *b* eſt à *d* ce que *p* eſt à *r*, d'où il ſuit *par Theor. 114.* que *o* eſt à *q* ce que *p* eſt à *r*. *A* eſt donc à *C* ce que *B* eſt à *D*.

THEOREME CXXXIV.

La ſomme de deux grandeurs eſt à l'une d'entre elles ce que la ſomme de deux autres grandeurs eſt à l'une d'entre elles ſi la premiere grandeur eſt au premier reſte ce que l'autre grandeur eſt au ſecond reſte. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *BC*. Soit *D* une grandeur epuiſée par les coordonnées *EF*. Si *B* eſt à *C* ce que *E* eſt à *F*, *A* eſt à *B* ce que *D* eſt à *E*.

Les grandeurs *BCEF* etant telles que *B* eſt à *C* ce que *E* eſt à *F*, deux nombres rationnels *bc* qui ont la même unité & deux nombres rationnels *ef* qui ont la même unité ſont tels que *b* meſure *B*, que *c* meſure *C*, que *e* meſure *E*, que *f* meſure *F* & que *b* eſt à *c* ce que *e* eſt à *f*.

Or la grandeur *A* etant epuisée par les coordonnées *B C*, il s'ensuit par le premier Corollaire du Lemme que des nombres rationnels *a p q* qui ont la même unité sont tels que *a* mesure *A*, que *p* mesure *B*, que *q* mesure *C*. Par le second Corollaire du Lemme *b* est semblable à *p* & *c* est semblable à *q*, d'où il suit *par Theor. 108. Cor. & 111.* que *b* est à *c* ce que *p* est à *q*. La grandeur *D* etant epuisée par les coordonnées *E F*, des nombres rationnels *d r s* qui ont la même unité sont aussi tels que *d* mesure *D*, que *r* mesure *E* & que *s* mesure *F* & *e* est à *f* ce que *r* est à *s*.

p est donc à *q* ce que *r* est à *s* *par Theor. 114.* d'où il suit *par Theor. 112.* que *a* est à *p* ce que *d* est à *r*. *A* est donc à *B* ce que *D* est à *E*.

THEOREME CXXXV.

Si la somme de deux grandeurs est à l'une d'entre elles ce que la somme de deux autres grandeurs est à l'une d'entre elles, la premiere grandeur est au premier reste ce que l'autre grandeur est à l'autre reste. Soit la grandeur *A* epuisée par les coordonnées *B C*. Soit la grandeur *D* epuisée par les coordonnées *E F*. Si *A* est à *B* ce que *D* est à *E*, *B* est à *C* ce que *E* est à *F*.

Les grandeurs *A B D E* etant telles que *A* est à *B* ce que *D* est à *E*, deux nombres rationnels *a b* qui ont la même unité & deux nombres rationnels *d e* qui ont la même unité sont tels

tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, que *d* meſure *D*, que *e* meſure *E* & que *a* eſt à *b* ce que *d* eſt à *e*.

Or *A* etant epuiſée par les coordonnées *BC*, il s'enſuit par le premier Corollaire du Lemme que des nombres rationnels *o p q* qui ont la même unité ſont tels que *o* meſure *A*, que *p* meſure *B*, que *q* meſure *C*. Par le ſecond Corollaire du Lemme *a* eſt ſemblable à *o* & *b* eſt ſemblable à *p*, d'où il ſuit *par Theor. 108. Cor. & 111.* que *a* eſt à *b* ce que *o* eſt à *p*. *D* etant epuiſée par les coordonnées *EF*, des nombres rationnels *r ſ t* qui ont la même unité ſont tels que *r* meſure *D*, que *ſ* meſure *E* & que *t* meſure *F* & *d* eſt à *e* ce que *r* eſt à *ſ*.

o eſt donc à *p* ce que *r* eſt à *ſ par Theor. 114.* d'où il ſuit *par Theor. 113.* que *p* eſt à *q* ce que *ſ* eſt à *t*. *B* eſt donc à *C* ce que *E* eſt à *F*.

THEOREME CXXXVI.

Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que la troiſieme ſoit à la quatrieme ce qu'une cinquieme grandeur eſt à une autre, la premiere eſt à la ſeconde ce que la cinquieme eſt à la ſixieme. Soient *A B C D E F* des grandeurs. Si *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D* & que *C* ſoit à *D* ce que *E* eſt à *F*, *A* eſt à *B* ce que *E* eſt à *F*.

Les grandeurs *A B C D* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*, deux nombres rationnels

nels *a b* qui ont la même unité & deux nombres rationnels *c d* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, que *c* meſure *C*, que *d* meſure *D* & que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d*. De même les grandeurs *CDEF* etant telles que *C* eſt à *D* ce que *E* eſt à *F*, deux nombres rationnels *ſt* qui ont la même unité & deux nombres rationnels *e f* qui ont la même unité ſont tels que *ſ* meſure *C*, que *t* meſure *D*, que *e* meſure *E*, que *f* meſure *F* & que *ſ* eſt à *t* ce que *e* eſt à *f*.

Or puiſque par le ſecond Corollaire du Lemme *c* eſt ſemblable à *ſ* & *d* eſt ſemblable à *t*, il s'enſuit *par Theor. 108. Cor. & 111.* que *c* eſt à *d* ce que *ſ* eſt à *t*, d'où il ſuit *par Theor. 114.* que *a* eſt à *b* ce que *ſ* eſt à *t*, ce que *e* eſt à *f*. *A* eſt donc à *B* ce que *E* eſt à *F*.

THEOREME CXXXVII.

La grandeur epuiſée par des coordonnées qui ſont les produits d'une même grandeur, eſt un produit de cette grandeur. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coordonnées *BC*. Soient *EFG* des grandeurs telles que *B* ſoit à *E* ce que *F* eſt à l'element de *B* & que *C* ſoit à *E* ce que *G* eſt à l'element de *C*. *A* eſt à *E* ce qu'une grandeur *D* eſt à l'element de *A*.

Les grandeurs *B E F* etant telles que *B* eſt à *E* ce que *F* eſt à *R* element de *B*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme que *B E* ſont egales ou inegales, que *F R* ſont egales ou inega-

inegales & B R etant egales ou inegales, il s'ensuit *par Theor. 64.* que $BEFR$ sont egales ou inegales. Les grandeurs CEG etant aussi telles que C est à E ce que G est à l'element de C, CEG sont egales ou inegales & la grandeur A etant epuisée par les coordonnées BC, il s'ensuit que $ABCEFGR$ sont egales ou inegales. Ainsi par le premier Corollaire du Lemme des nombres rationnels $abcefgr$ qui ont la même unité sont tels que a mesure A, que b mesure B &c.

$BEFR$ sont mesurées par des nombres rationnels tels que celui qui mesure B est à celui qui mesure E ce que celui qui mesure F est à celui qui mesure R & puisque les nombres rationnels qui mesurent la même grandeur sont semblables, il s'ensuit *par Theor. 108. Cor. 111 & 114.* que b est à e ce que f est à r. Par le septieme Corollaire du Lemme l'unité de r mesure R. On voit par là que fr sont premiers entre eux, d'où il suit *par Theor. 110 & 77. Cor.* que e est l'unité d'un nombre β qui mesure B & qui est semblable à f. On prouvera aussi que c est à e ce que g est à r & que e est l'unité d'un nombre γ qui mesure C & qui est semblable à g.

Il paroit donc *par Theor. 70.* que e est l'unité d'un nombre α qui mesure A, d'où il suit *par Theor. 85.* qu'un nombre d qui a l'unité de r & qui est semblable à α est l'unité d'un nombre qui mesure A & qui est semblable à e. Donc *par Theor. 108.* r est à d ce que e est à a &

par consequent *A* est à *E* ce qu'une grandeur *D* mesurée par *d*, est à *R*.

COROLLAIRE.

On voit donc aussi que si *A* est à *E* ce qu'une grandeur *C* est à *Q* element de *C*, *A* est à *E* ce que *D* est à *R*. Si une grandeur est à une autre ce qu'une troisieme grandeur est à l'element de la troisieme, la premiere est un produit de la seconde.

THEOREME CXXXVIII.

Le produit d'une grandeur epuisée par des coordonnées est epuisé par des coordonnées qui sont les produits de celles là multipliées par la multipliante qui donne le premier produit. Soient *ALO* des grandeurs telles que *A* soit à *L* ce que *O* est à l'element de *A*. Si *L* est epuisée par les coordonnées *MN*, *A* est epuisée par les coordonnées *BC* telles que *B* est à *M* ce que *O* est à l'element de *B* & que *C* est à *N* ce que *O* est à l'element de *C*.

Les grandeurs *ALO* etant telles que *A* est à *L* ce que *O* est à *R* element de *A*, *ALOR* sont egales ou inegales & *L* etant epuisée par les coordonnées *MN*, *ALMNOR* sont egales ou inegales. Ainsi des nombres rationnels *almnor* qui ont la même unité sont tels que *a* mesure *A*, que *l* mesure *L*, &c.

Les

Les nombres rationnels qui meſurent la même grandeur etant ſemblables, *a* eſt à *l* ce que *o* eſt à *r*. *R* etant meſurée par l'unité de *r*, *or* ſont premiers entre eux, d'où il ſuit *par Theor. 110 & 77. Cor.* que *l* eſt l'unité d'un nombre *α* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *o*.

L etant epuiſée par les coordonnées *M N*, il paroit *par Theor. 94.* que *A* eſt epuiſée par les coordonnées *B C* telles que *B* eſt meſurée par un nombre *β* dont l'unité meſure *M*, que *C* eſt meſurée par un nombre *γ* dont l'unité meſure *N* & que *β γ* ſont ſemblable à *α* & par conſequent à *o*. *B* par le cinquieme Corollaire du Lemme eſt meſurée par un nombre *b* qui a l'unité de *a*, d'où il ſuit *par Theor. 68.* que *m* eſt une unité de *B*. *C* eſt auſſi meſurée par un nombre *c* qui a l'unité de *a* & *n* eſt une unité *C*. Donc *par Theor. 108 & 111.* *r* eſt à *o* ce que *m* eſt à *b* & *r* eſt à *o* ce que *n* eſt à *c*. Par conſequent *B* eſt à *M* ce que *O* eſt à *R* & *C* eſt à *N* ce que *O* eſt à *R*.

THEOREME CXXXIX.

Les produits des grandeurs egales ſont entre eux comme les multipliantes. Soient *ABC* des grandeurs telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à l'element de *A*. Soient *DEF* des grandeurs telles que *D* ſoit à *E* ce que *F* eſt à l'element de *D*. Si *B* eſt egale à *E*, *A* eſt à *D* ce que *C* eſt à *F*.

Les

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *R* element de *A*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme que *A B* ſont egales ou inegales, que *C R* ſont egales ou inegales & *A R* etant egales ou inegales, il s'enſuit *par Theor. 64.* que *A B C R* ſont egales ou inegales. Les grandeurs *DEF* etant auſſi telles que *D* eſt à *E* ce que *F* eſt à l'element de *D*, *D E F* ſont egales ou inegales & *B* etant egale à *E*, il s'enſuit que *A B C D E F R* ſont egales ou inegales. Ainſi par le premier Corollaire du Lemme des nombres rationnels *a b c d e f r* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, que *c* meſure *C*, &c.

A B C R ſont meſurées par des nombres rationnels tels que celui qui meſure *A* eſt à celui qui meſure *B* ce que celui qui meſure *C* eſt à celui qui meſure *R* & puiſque les nombres rationnels qui meſurent la même grandeur ſont ſemblables, il s'enſuit *par Theor. 108. Cor. 111 & 114.* que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *r*. Par le ſeptieme Corollaire du Lemme l'unité de *r* meſure *R*. On voit par là que *c r* ſont premiers entre eux, d'où il ſuit *par Theor. 110 & 77. Cor.* que *b* eſt l'unité d'un nombre *α* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *c*. On prouvera auſſi que *d* eſt à *e* ce que *f* eſt à *r* & que *e* eſt l'unité d'un nombre *δ* qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à *f*.

Or *B* etant egale à *E*, *b* eſt ſemblable à *e* par le ſecond Corollaire du Lemme, d'où il ſuit

par

par Theor. 115. que *a* eſt à *d* ce que *α* eſt à *δ*, ce que *c* eſt à *f*. *A* eſt donc à *D* ce que *C* eſt à *F*.

COROLLAIRE I.

Si au lieu de ſuppoſer que *B* ſoit egale à *E*, on ſuppoſe que *C* ſoit egale à *F*, *c* ſera ſemblable à *f*, d'où il ſuivra que *α* eſt ſemblable à *δ*. *a* ſera donc à *d* ce que *b* eſt à *e* *par Theor. 116.* & par conſequent *A* ſera à *D* ce que *B* eſt à *E*. Les produits des grandeurs dont les multipliantes ſont egales ſont entre eux comme ces grandeurs.

COROLLAIRE II.

Si *A* eſt à *D* ce que *B* eſt à *E* & que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à *R* element de *A*, les grandeurs *A B C R D E* ſont egales ou inegales, d'où il ſuit par le huitieme Corollaire du Lemme que *R* eſt l'element de *D*. Or *par Theor. 133 & 136* *D* eſt à *E* ce que *A* eſt à *B*, ce que *C* eſt à *R*. Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que la premiere ſoit le produit de la troiſieme, la ſeconde eſt le produit de la quatrieme multipliée par la multipliante de la troiſieme.

THEOREME CXL.

Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que la multipliante de la premiere ſoit à la multipliante de la ſeconde ce que la multipliante de la troiſieme eſt à la multipliante de la quatrieme, le premier produit eſt

eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme. Soient les grandeurs *ABC*, *DEF*, *GHI*, *LMN* telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à l'element de *A*, que *D* ſoit à *E* ce que *F* eſt à l'element de *D*, que *G* ſoit à *H* ce que *I* eſt à l'element de *G* & que *L* ſoit à *M* ce que *N* eſt à l'element de *L*. Si *B* eſt à *E* ce que *H* eſt à *M* & que *C* ſoit à *F* ce que *I* eſt à *N*, *A* eſt à *D* ce que *G* eſt à *L*.

Les grandeurs *ABC* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *R* element de *A*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme que *AB* ſont egales ou inegales, que *CR* ſont egales ou inegales & *AR* etant egales ou inegales, il s'enſuit *par Theor. 64.* que *ABCR* ſont egales ou inegales. Les grandeurs *DEF*, *GHI*, *LMN* etant telles que *D* eſt à *E* ce que *F* eſt à l'element de *D*, que *G* eſt à *H* ce que *I* eſt à *T* element de *G* & que *L* eſt à *M* ce que *N* eſt à l'element de *L*, *DEF* ſont egales ou inegales, *GHIT* ſont egales ou inegales & *LMN* ſont egales ou inegales. *B* etant à *E* ce que *H* eſt à *M*, il paroit auſſi par le troiſieme Corollaire du Lemme que *BE* ſont egales ou inegales & que *HM* ſont egales ou inegales, d'où il ſuit *par Theor. 64.* que *ABCDEFR* ſont egales ou inegales & que *GHILMNT* ſont egales ou inegales. Ainſi par le premier Corollaire du Lemme les nombres rationnels *abcdefr* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B* &c. & les nombres rationnels *ghilmnt* ſont tels que *g* meſure *G*, que *h* meſure *H* &c.

ABCR

A B C R ſont meſurées par des nombres rationnels tels que celui qui meſure *A* eſt à celui qui meſure *B* ce que celui qui meſure *C* eſt à celui qui meſure *R* & puiſque les nombres rationnels qui meſurent la même grandeur ſont ſemblables, il s'enſuit *par Theor. 108. Cor. 111 & 114.* que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *r*. Par le ſeptieme Corollaire du Lemme l'unité de *r* meſure *R*. On voit par là que *c r* ſont premiers entre eux, d'où il ſuit *par Theor. 110 & 77. Cor.* que *b* eſt l'unité d'un nombre *α* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *c*. On prouvera auſſi que *e* eſt l'unité d'un nombre *δ* qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à *f*, que *h* eſt l'unité d'un nombre *γ* qui meſure *G* & qui eſt ſemblable à *i* & que *m* eſt l'unité d'un nombre *λ* qui meſure *L* & qui eſt ſemblable à *n*.

BEHM ſont auſſi meſurées par des nombres rationnels tels que celui qui meſure *B* eſt à celui qui meſure *E* ce que celui qui meſure *H* eſt à celui qui meſure *M*, d'où il ſuit que *b* eſt à *e* ce que *h* eſt à *m*. Par la même raiſon, puiſque *C* eſt à *F* ce que *I* eſt à *N*, *c* eſt à *f* ce que *i* eſt à *n*, d'où il ſuit que *α* eſt à *δ* ce que *γ* eſt à *λ*. Donc *par Theor. 118.* *a* eſt à *d* ce que *g* eſt à *l* & par conſequent *A* eſt à *D* ce que *G* eſt à *L*.

COROLLAIRE I.

Si *B* etant à *E* ce que *H* eſt à *M*, *A* eſt à *D* ce que *G* eſt à *L*, *b* ſera à *e* ce que *h* eſt à *m* & *a* ſera à *d* ce que *g* eſt à *l*. Donc

par

par Theor. 119. α fera à δ ce que γ eſt à λ, d'où il ſuit que c eſt à f ce que i eſt à n & que C eſt à F ce que I eſt à N. Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que le produit de la premiere ſoit au produit de la ſeconde ce que le produit de la troiſieme eſt au produit de la quatrieme, la premiere multipliante eſt à la ſeconde ce que la troiſieme eſt à la quatrieme.

COROLLAIRE II.

Si A etant à D ce que G eſt à L, C eſt à F ce que I eſt à N, a ſera à d ce que g eſt à l & parceque c eſt à f ce que i eſt à n, α ſera à δ ce que γ eſt à λ. Donc *par Theor. 119. Cor.* b eſt à e ce que h eſt à m & B eſt à E ce que H eſt à M. Si le produit d'une grandeur eſt au produit d'une autre ce que le produit d'une troiſieme grandeur eſt au produit d'une autre & que la premiere multipliante ſoit à la ſeconde ce que la troiſieme eſt à la quatrieme, la premiere grandeur multipliée eſt à la ſeconde ce que la troiſieme eſt à la quatrieme.

THEOREME CXLI.

Si une grandeur eſt le produit de deux autres grandeurs, l'une des grandeurs multipliées eſt à l'autre ce que la ſeconde multipliante eſt à la premiere. Soient les grandeurs ABC, DE telles que A ſoit à B ce que C eſt à R element de A. Si A eſt à D ce que E eſt à R, B eſt à D ce que E eſt à C.

Les

Les grandeurs *ABC* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *R* element de *A*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme & *par Theor. 64.* que *ABCR* ſont egales ou inegales & les grandeurs *ADE* etant telles que *A* eſt à *D* ce que *E* eſt à *R*, *ADER* ſont egales ou inegales, d'où il ſuit que *ABCDER* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *a b c d e r* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, &c.

ABCR etant meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, il s'enſuit par le ſecond Corollaire du Lemme que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *r*. Donc *par Theor. 110 & 77. Cor.* *b* eſt l'unité d'un nombre *α* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *c*. On prouvera de même que *d* eſt l'unité d'un nombre *η* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *e*.

Or *par Theor. 120.* *b* eſt à *d* ce que *η* eſt à *α* & *par Theor. 108. Cor. & 111.* *η* eſt à *α* ce que *e* eſt à *c*, d'où il ſuit *par Theor. 114.* que *b* eſt à *d* ce que *e* eſt à *c* & par conſequent *B* eſt à *D* ce que *E* eſt à *C*.

THEOREME CXLII.

Si une grandeur eſt à une autre ce que la multipliante de la ſeconde eſt à la multipliante de la premiere, les deux produits ſont egaux. Soient les grandeurs *ABC* telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à l'element de *A*. Soient les grandeurs

DEF telles que *D* ſoit à *E* ce que *F* eſt à l'element de *D*. Si *B* eſt à *E* ce que *F* eſt à *C*, *A* eſt egale à *D*.

Les grandeurs *ABC* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *R* element de *A*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme & *par Theor. 64.* que *ABCR* ſont egales ou inegales. Les grandeurs *D E F* etant telles que *D* eſt à *E* ce que *F* eſt à l'element de *D*, *DEF* ſont egales ou inegales & puiſque *B* eſt à *E* ce que *F* eſt à *C*, il s'enſuit que *BE* ſont egales ou inegales & que par conſequent *A B C D E F R* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *a b c d e f r* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B* &c.

A B C R etant meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, il s'enſuit par le ſecond Corollaire du Lemme que *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *r*. Donc *par Theor. 110 & 77. Cor.* *b* eſt l'unité d'un nombre *α* qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *c*. On prouvera de même que *e* eſt l'unité d'un nombre *δ* qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à *f*.

BEFC etant auſſi meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, *b* eſt à *e* ce que *f* eſt à *c* & par conſequent *b* eſt à *e* ce que *δ* eſt à *α*, d'où il ſuit *par Theor. 122.* que *a* eſt ſemblable à *d*. Donc *par Theor. 77. Cor.* *a* eſt le même

me que *d*, d'où il ſuit par le quatrieme Corollaire du Lemme que *A* eſt egale à *D*.

THEOREME CXLIII.

Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que la premiere etant egale à la quatrieme, la ſeconde ſoit egale à la troiſieme, la premiere eſt egale à la ſeconde. Soient les grandeurs *ABCD* telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à *D*. Si *A* eſt egale à *D* & que *B* ſoit egale à *C*, *A* eſt egale à *B*.

Les grandeurs *A B C D* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme que *A B* ſont egales ou inegales & que *C D* ſont egales ou inegales & puiſque *A* eſt egale à *D*, il s'enſuit *par Theor. 64.* que *ABCD* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *a b c d* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B*, &c.

A B C D etant meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d* & puiſque *A* eſt egale à *D* & que *B* eſt egale à *C*, *a* eſt ſemblable à *d* & *b* eſt ſemblable à *c* par le ſecond Corollaire du Lemme. Donc *par Theor. 123.* *a* eſt ſemblable à *b*, d'où il ſuit par le quatrieme Corollaire du Lemme que *A* eſt egale à *B*.

THEOREME CXLIV.

Si une grandeur eſt à une autre ce qu'une troiſieme grandeur eſt à une autre & que la pre-

miere ſoit moindre que la ſeconde, la troiſieme eſt moindre que la quatrieme. Soient les grandeurs *ABCD* telles que *A* ſoit à *B* ce que *C* eſt à *D*. Si *A* eſt moindre que *B*, *C* eſt moindre que *D*.

La grandeur *A* etant egale à une partie de la grandeur *B*, il paroit par le premier & le ſecond Corollaire du Lemme que deux nombres rationnels *a b* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A* & cette partie de *B* & que *b* meſure *B*. Les grandeurs *CD* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *C* eſt à *D*, deux nombres rationnels *c d* qui ont la même unité ſont tels que *c* meſure *C* & que *d* meſure *D*.

ABCD etant meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme & les nombres rationnels qui meſurent la même grandeur etant ſemblables, *a* eſt à *b* ce que *c* eſt à *d*. Donc *par Theor. 124.* *c* meſure une partie de *D*, d'où il ſuit par le quatrieme Corollaire du Lemme que *C* eſt moindre que *D*.

THEOREME CXLV.

Si de la ſomme de deux grandeurs & de la ſomme de deux autres grandeurs la premiere grandeur eſt à la troiſieme ce que la quatrieme eſt à la ſeconde & que la premiere ſoit moindre que la troiſieme & que la quatrieme, la premiere ſomme eſt plus grande que la ſeconde. Soient les grandeurs *B E F C* telles que *B* ſoit à *E* ce que *F* eſt à *C*. Soit *A* une grandeur epuiſée par les coor-

coordonnées *BC*. Soit *D* une grandeur epuiſée par les coordonnées *EF*. Si *B* eſt moindre que *E* & que *F*, *A* eſt plus grande que *D*.

Les grandeurs *BEFC* etant telles que *B* eſt à *E* ce que *F* eſt à *C* & *B* etant moindre que *E*, *F* eſt moindre que *C* *par Theor. 144.* Puiſque *B* eſt auſſi moindre que *F*, que la grandeur *A* eſt epuiſée par les coordonnées *BC* & la grandeur *D* par les coordonnées *EF*, il s'enſuit *par Theor. 64.* que *ADBEFC* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *adb efc* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *d* meſure *D*, que *b* meſure *B*, une partie de *E* & une partie de *F*, que *e* meſure *E*, que *f* meſure *F* & une partie de *C* & que *c* meſure *C*.

BEFC etant meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, *b* eſt à *e* ce que *f* eſt à *c*. Donc *par Theor. 125.* *d* meſure une partie de *A*, d'où il ſuit par le quatrieme Corollaire du Lemme que *A* eſt plus grande que *D*.

THEOREME CXLVI.

Si des trois grandeurs la premiere eſt à la ſeconde ce qu'une grandeur multipliée eſt à une autre & que la ſeconde ſoit à la troiſieme ce que la premiere multipliante eſt à la ſeconde multipliante, la premiere grandeur eſt à la troiſieme ce que le premier produit eſt au ſecond. Soient *ABC* des

grandeurs. Soient les grandeurs *D E F*, *G H I* telles que *D* ſoit à *E* ce que *F* eſt à l'element de *D* & que *G* ſoit à *H* ce que *I* eſt à l'element de *G*. Si *A* eſt à *B* ce que *E* eſt à *H* & que *B* ſoit à *C* ce que *F* eſt à *I*, *A* eſt à *C* ce que *D* eſt à *G*.

Les grandeurs *DEF* etant telles que *D* eſt à *E* ce que *F* eſt à *S* element de *D*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme & *par Theor. 64.* que *DEFS* ſont egales ou inegales. De même les grandeurs *GHI* etant telles que *G* eſt à *H* ce que *I* eſt à l'element de *G*, *GHI* ſont egales ou inegales. Les grandeurs *A B C* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *E* eſt à *H* & que *B* eſt à *C* ce que *F* eſt à *I*, il paroit que *A B C* ſont egales ou inegales & que *DEFGHIS* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *a b c* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B* & que *c* meſure *C* & des nombres rationnels *d e f g h i ſ* qui ont la même unité ſont tels que *d* meſure *D*, que *e* meſure *E*, &c.

DEFS etant meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, *d* eſt à *e* ce que *f* eſt à *ſ*. Par la même raiſon *g* eſt à *h* ce que *i* eſt à *ſ*, *a* eſt à *b* ce que *e* eſt à *h* & *b* eſt à *c* ce que *f* eſt à *i*. *Par Theor. 110. & 77. Cor.* *e* eſt l'unité d'un nombre δ qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à *f* & *h* eſt l'unité d'un nombre γ qui meſure *G* & qui eſt ſemblable à *i*. *b* eſt donc à *c* ce que δ eſt à γ.

Or

Or puisque *a* eſt à *b* ce que *e* eſt à *b* & que *b* eſt à *c* ce que *δ* eſt à *γ*, *a* eſt à *c* ce que *d* eſt à *g par Theor. 127.* & par conſequent *A* eſt à *C* ce que *D* eſt à *G.*

THEOREME CXLVII.

Si de pluſieurs grandeurs la premiere eſt à la ſeconde ce que la quatrieme eſt à la cinquieme & que la ſeconde ſoit à la troiſieme ce que la cinquieme eſt à la ſixieme, la premiere eſt à la troiſieme ce que la quatrieme eſt à la ſixieme. Soient *ABC*, *DEF* des grandeurs. Si *A* eſt à *B* ce que *D* eſt à *E* & que *B* ſoit à *C* ce que *E* eſt à *F*, *A* eſt à *C* ce que *D* eſt à *F.*

Les grandeurs *ABC*, *DEF* etant telles que *A* eſt à *B* ce que *D* eſt à *E* & que *B* eſt à *C* ce que *E* eſt à *F*, il paroit par le troiſieme Corollaire du Lemme & *par Theor. 64.* que *A B C* ſont egales ou inegales & que *D E F* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *a b c* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B* & que *c* meſure *C* & des nombres rationnels *d e f* qui ont la même unité ſont tels que *d* meſure *D*, que *e* meſure *E* & que *f* meſure *F.*

ABDE etant meſurées par des nombres rationnels dont le premier eſt au ſecond ce que le troiſieme eſt au quatrieme, *a* eſt à *b* ce que *d* eſt à *e*. Par la même raiſon *b* eſt à *c* ce que *e* eſt à *f*. Donc *par Theor. 128.* *a* eſt à *c* ce que *d* eſt à *f* & par conſequent *A* eſt à *C* ce que *D* eſt à *F.*

COROLLAIRE.

Si *A* eſt à *B* ce que *E* eſt à *F* & que *B* ſoit à *C* ce que *D* eſt à *E*, on prouvera de même *par Theor. 128. Cor.* que *A* eſt à *C* ce que *D* eſt à *F*. Si de pluſieurs grandeurs la premiere eſt à la ſeconde ce que la cinquieme eſt à la ſixieme & que la ſeconde ſoit à la troiſieme ce que la quatrieme eſt à la cinquieme, la premiere eſt à la troiſieme ce que la quatrieme eſt à la ſixieme.

DEFINITION XII.

Si de pluſieurs grandeurs la ſeconde eſt un produit de la premiere, la troiſieme un produit de la ſeconde & ainſi de ſuite & que la ſeconde multiplie toutes celles de ces grandeurs qui donnent ces produits, chacun de ces produits eſt une *puiſſance* de la ſeconde grandeur. La ſeconde grandeur eſt la premiere puiſſance, la troiſieme grandeur eſt la ſeconde puiſſance & ainſi de ſuite. La ſeconde grandeur eſt la *racine* de ces puiſſances. Si une puiſſance eſt premiere, ſeconde, troiſieme & ainſi de ſuite, le nombre exprimé eſt l'*expoſant* de la puiſſance. Soient *REDCB* &c. des grandeurs telles que *E* ſoit à *R* ce que *E* eſt à l'element de *E*, que *D* ſoit à *E* ce que *E* eſt à l'element de *D*, que *C* ſoit à *D* ce que *E* eſt à l'element de *C*, que *B* ſoit à *C* ce que *E* eſt à l'element de *B*, &c. *EDCB* &c. ſont des puiſſances de *E*. *E* eſt la premiere puiſſance, *D* la ſeconde, *C* la troiſieme, *B* la quatrieme. *E* eſt la racine des puiſſances *EDCB* &c. Le nom-

nombre un eſt l'expoſant de *E*, 2 eſt l'expoſant de *D*, 3 eſt l'expoſant de *C* &c.

THEOREME CXLVIII.

Une grandeur etant à une autre ce que celle ci eſt à une troiſieme grandeur, ce que la troiſieme eſt à une quatrieme & ainſi de ſuite; ſi la premiere & quelque autre que la derniere ne ſont pas les produits de deux grandeurs multipliées par une même grandeur plus grande que l'element de la premiere: la premiere de ces grandeurs eſt l'element de toutes les autres & celles ci ſont des puiſſances de la ſeconde grandeur. La ſeconde grandeur eſt la premiere puiſſance, la troiſieme grandeur eſt la ſeconde puiſſance & ainſi de ſuite. Soient *REDCB* &c. des grandeurs telles que *R* ſoit à *E* ce que *E* eſt à *D*, ce que *D* eſt à *C*, ce que *C* eſt à *B* &c. Suppoſé que l'une de ces grandeurs qui eſt à une autre ce que *R* eſt à *E* ſoit telle, que ſi elle eſt à une grandeur *F* ce qu'une grandeur *T* eſt à l'element de la premiere & ſi *R* eſt à une grandeur *S* ce que *T* eſt à l'element de *R*, *T* ne ſoit pas plus grande que l'element de *R*. *R* eſt l'element des grandeurs *EDCB* &c. & *EDCB* &c. ſont des puiſſances de *E*, *E* eſt la premiere puiſſance, *D* la ſeconde, *C* la troiſieme &c.

Les grandeurs *R E D C B* &c. etant telles que *R* eſt à *E* ce que *E* eſt à *D*, ce que *D* eſt à *C*, ce que *C* eſt à *B* &c. il paroit par le troi-

ſieme Corollaire du Lemme & *par Theor. 64.* que *REDCB* &c. ſont egales ou inegales. Ainſi par le premier & le ſecond Corollaire du Lemme des nombres rationnels *r e d c b* &c. qui ont la même unité ſont tels que *r* meſure *R*, que *e* meſure *E* &c. & que *r* eſt à *e* ce que *e* eſt à *d*, ce que *d* eſt à *c*, ce que *c* eſt à *b* &c.

1. Puisque *r* eſt à *e* ce que *e* eſt à *d*, il s'enſuit *par Theor. 96. Cor.* qu'un nombre dont l'unité *t* eſt l'unité de *r* priſe un nombre de fois & un autre nombre dont *t* eſt l'unité ſont tels que le premier de ces nombres meſure *R*, que le ſecond meſure *E* & que ces nombres ſont premiers entre eux. Or *par Theor. 85.* un nombre *ſ* qui a l'unité de *r* & qui eſt ſemblable à ce nombre qui meſure *R* & dont *t* eſt l'unité, eſt une unité de *R* & un nombre *f* qui a l'unité de *r* & qui eſt ſemblable à ce nombre qui meſure *E* & dont *t* eſt l'unité eſt une unité de *E*, d'où il ſuit *par Theor. 108.* que l'unité de *r* eſt à *t* ce que *ſ* eſt à *r*, ce que *f* eſt à *e*. Soient donc les grandeurs *TSF* telles que *t* meſure *T*, que *ſ* meſure *S* & que *f* meſure *F*. L'Element de *R* & de *E* eſt à *T* ce que *S* eſt à *R*, ce que *F* eſt à *E*. Suppoſé donc que *T* ne ſoit pas plus grande que l'element de *R*. Il ſuit de là *par Theor. 132.* que *S* eſt egale à *R* & que *F* eſt egale à *E*. Donc *ſ* eſt ſemblable à *r* & *f* eſt ſemblable à *e* & puisque *ſf* ſont premiers entre eux, *r e* ſont premiers entre eux.

Mais

Mais *r* etant à *e* ce que *e* eſt à *d*, il paroit *par Theor. 110 & 85.* que *r* eſt une unité de *E*. Donc *par Theor. 98. Cor.* *R* eſt meſurée par l'unité de *r*.

2. Puiſque *r* eſt à *e* ce que *c* eſt à *b*, d'où il ſuit que *r* eſt à *c* ce que *e* eſt à *b*, on prouvera de même que des nombres *tſf* qui ont l'unité de *r* ſont tels que *t* eſt une unité de *R* & de *C*, que *ſ* eſt une unité de *R*, que *f* eſt une unité de *C*, d'où l'on deduira que l'element de *R* & de *C* eſt à *T* ce que *S* eſt à *R*, ce que *F* eſt à *C* & en ſuppoſant que *T* ne ſoit pas plus grande que l'element de *R*, il s'enſuit que *r c* ſont premiers entre eux.

Mais *r* etant à *c* ce que *e* eſt à *b*, il paroit *par Theor. 110 & 85.* que *r* eſt une unité de *E*. *r* etant à *e* ce que *e* eſt à *d*, *e* eſt donc auſſi une unité de *D* *par Theor. 117.* d'où il ſuit *par Theor. 89 & 72.* que *r* eſt une unité de *D*. Enfin *r* etant à *e* ce que *d* eſt à *c*, *d* eſt une unité de *C*, d'où il ſuit que *r* eſt une unité de *C*. Donc *par Theor. 98. Cor.* l'unité de *r* meſure *R*.

R etant donc meſurée par l'unité de *r*, *R* eſt l'element des grandeurs *EDCB* &c. & puiſque *R* eſt à *E* ce que *E* eſt à *D*, ce que *D* eſt à *C*, ce que *C* eſt à *B*, il s'enſuit que *E D C B* &c. ſont des puiſſances de *E*, que *E* eſt la premiere puiſſance, *D* la ſeconde, *C* la troiſieme, *B* la quatrieme &c.

EXEM-

EXEMPLE. Il paroit par le Scholie du Theor. 130. que si l'on entend par le point une ligne qui ne surpasse aucune partie d'une autre ligne, ce point lineaire est l'element de cette ligne, que si l'on entend par le point une surface qui ne surpasse aucune partie d'un quarré, ce point superficiaire est l'element d'une ligne superficiaire aussi longue que le quarré & l'element du quarré & que si l'on entend par le point un solide qui ne surpasse aucune partie d'un cube, ce point solide est l'element d'une ligne solide aussi longue que le cube, l'element d'un quarré solide de la même longueur & l'element du cube. Or ce point etant à cette ligne ce que cette ligne est à ce quarré, ce que ce quarré est à ce cube, cette ligne est la premiere puissance d'elle même, ce quarré est la seconde & ce cube la troisieme puissance de cette ligne.

COROLLAIRE.

Soient *Z Y X V* &c. des nombres qui ayent la même unité & tels que *Z* soit à *Y* ce que *Y* est à *X*, ce que *X* est à *V* &c. Si *Z* & *X* sont premiers entre eux, il paroit par la demonstration du Theoreme que la grandeur mesurée par *Z* est mesurée par l'unité de *Z*. On voit donc aussi *par Theor. 117.* que *Y* est l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *X* & qui est semblable à *Y*, que *X* est l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *V* & qui est semblable à *Y* &c. Plusieurs nombres qui ont la même unité etant tels que le premier est

eſt au ſecond ce que le ſecond eſt au troiſieme, ce que le troiſieme eſt au quatrieme & ainſi de ſuite: ſi le premier & un autre que le dernier ſont premiers entre eux, le premier de ces nombres eſt cette unité, le ſecond diviſe le troiſieme & lui donne un quotient ſemblable au ſecond, le troiſieme diviſe le quatrieme & lui donne un quotient ſemblable au ſecond & ainſi de ſuite.

On voit par là ce que c'eſt qu'une puiſſance numerique. Si de pluſieurs nombres le premier diviſe le ſecond, le ſecond diviſe le troiſieme & ainſi de ſuite & que tous les quotiens que ces diviſeurs donnent ſoient ſemblables au ſecond nombres, le premier de ces nombres meſure la grandeur meſurée par leur unité & tous les autres ſont des *puiſſances* du ſecond nombre. Le ſecond nombre eſt la premiere puiſſance, le troiſieme eſt la ſeconde puiſſance & ainſi de ſuite. Le ſecond eſt la *racine* de ces puiſſances.

THEOREME CXLIX.

Si pluſieurs grandeurs ſont telles que la ſeconde ſoit le produit de la premiere multipliée par la ſeconde, que la troiſieme ſoit la ſeconde puiſſance de la ſeconde, que la quatrieme ſoit la troiſieme puiſſance de la ſeconde & ainſi de ſuite, la premiere grandeur, qui eſt l'element de toutes les autres, eſt à la ſeconde ce que la ſeconde eſt à la troiſieme, ce que la troiſieme eſt à la quatrieme & ainſi de ſuite. Soient *R E D C* &c. des grandeurs telles que *E* ſoit à *R* ce que *E* eſt à l'element de *E*,

que

que *D* ſoit la ſeconde puiſſance de *E*, *C* la troiſieme puiſſance de *E* &c. *R* eſt l'element des grandeurs *EDC* &c. & *R* eſt à *E* ce que *E* eſt à *D*, ce que *D* eſt à *C* &c.

Les grandeurs *REDC* &c. etant telles que *E* eſt à *R* ce que *E* eſt à l'element de *E*, que *D* eſt la ſeconde puiſſance de *E*, que *C* eſt la troiſieme puiſſance de *E* &c. *D* eſt à *E* ce que *E* eſt à l'element de *D*, *C* eſt à *D* ce que *E* eſt à l'element de *C* &c. Il eſt donc evident que *REDC* &c. ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *r e d c* &c. qui ont la même unité ſont tels que *r* meſure *R*, que *e* meſure *E* &c.

Or puiſque *E* eſt à *R* ce que *E* eſt à l'element de *E*, *E* eſt à *E* ce que *R* eſt à l'element de *E* *par Theor. 133.* d'où il ſuit *par Theor. 132.* que *R* eſt egale à l'element de *E* & comme par le ſeptieme Corollaire du Lemme tous les elemens de *E* ſont meſurés par l'unité des nombres rationnels qui les meſurent, il s'enſuit par le ſecond Corollaire du Lemme que l'unité de *r* meſure *R*. *R* eſt donc l'element de chacune des grandeurs *EDC* &c.

D etant à *E* ce que *E* eſt à l'element de *D* & *E* etant à tout element de *D* ce que *E* eſt à *R* *par Theor. 130. Cor. 1. & 133.* *D* eſt à *E* ce que *E* eſt à *R* *par Theor. 136.* On prouvera de même que *C* eſt à *D* ce que *E* eſt à *R*, &c.

COROL-

COROLLAIRE.

Soient *ZYXV* &c. des nombres qui ayent la même unité & tels que *Z* ſoit l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *Y* & qui ſoit ſemblable à *Y*, que *Y* ſoit l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *X* & qui ſoit ſemblable à *Y*, que *X* ſoit l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *V* & qui ſoit ſemblable à *Y* &c. Puisque *Z* eſt l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *Y* & qui eſt ſemblable à *Y*, il s'enſuit *par Theor. 79.* que la grandeur meſurée par *Z* eſt meſurée par l'unité de *Z*. *Y* etant l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *X* & qui eſt ſemblable à *Y*, il s'enſuit *par Theor. 108.* que *Z* eſt à *Y* ce que *Y* eſt à *X*. *X* etant l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *V* & qui eſt ſemblable à *Y*, on prouvera de même que *Z* eſt à *Y* ce que *X* eſt à *V*. Si pluſieurs nombres ſont tels que le premier diviſe le ſecond & lui donne un quotient ſemblable au ſecond, que le troiſieme ſoit la ſeconde puiſſance du ſecond, que le quatrieme ſoit la troiſieme puiſſance du ſecond & ainſi de ſuite, le premier de ces nombres meſure la grandeur meſurée par leur unité & le premier eſt au ſecond ce que le ſecond eſt au troiſieme, ce que le troiſieme eſt au quatrieme & ainſi de ſuite.

THEOREME CL.

Si de pluſieurs grandeurs la premiere eſt à la ſeconde ce que la ſeconde eſt à la troiſieme, ce que

que la troisieme est à la quatrieme & ainsi de suite, deux racines sont telles que l'une est à l'autre ce que la premiere grandeur est à la seconde & que la seconde puissance de celle là est à la seconde puissance de celle ci ce que la premiere grandeur est à la troisieme, que la troisieme puissance de celle là est à la troisieme puissance de celle ci ce que la premiere grandeur est à la quatrieme & ainsi de suite. Soient des grandeurs $BCDE$ &c. telles que B soit à C ce que C est à D, ce que D est à E &c. Des grandeurs HGF &c. SRQ &c. sont telles que G est la seconde puissance de H, que F est la troisieme puissance de H, &c. que R est la seconde puissance de S, que Q est la troisieme puissance de S, &c. que H est à S ce que B est à C, que G est à R ce que B est à D, que F est à Q ce que B est à E, &c.

Les grandeurs $BCDE$ &c. etant telles que B est à C ce que C est à D, ce que D est à E &c. des nombres rationnels $bcde$ &c. qui ont la même unité sont tels que b mesure B, que c mesure C, &c.

b est à c ce que c est à d. Un nombre k qui a l'unité de b est l'unité des nombres $\beta\gamma$ qui sont premiers entre eux & tels que β mesure B & que γ mesure C *par Theor. 96. Cor.* Donc *par Theor. 115.* β est à γ ce que b est à c & par consequent β est à γ ce que c est à d. Un nombre l qui a l'unité de b est donc l'unité des nombres $\xi\delta$ qui sont tels que ξ qui mesure C est

eſt ſemblable à β & que δ qui meſure D eſt ſemblable à γ *par Theor. 110.* Soient KL des grandeurs telles que k meſure K & que l meſure L. Il paroit encore *par Theor. 96. Cor.* qu'un nombre m qui a l'unité de b eſt l'unité des nombres $\varkappa\lambda$ qui ſont premiers entre eux & tels que $\varkappa$ meſure K & que λ meſure L. Or γ eſt à ξ ce que l eſt à k *par Theor. 120.* ce que λ eſt à $\varkappa$ *par Theor. 115.* d'où il ſuit *par Theor. 110. Cor.* que $\varkappa$ eſt ſemblable à ξ & que λ eſt ſemblable à γ. Puiſque k eſt l'unité de β & que m eſt l'unité de $\varkappa$, m eſt l'unité d'un nombre π qui meſure B *par Theor. 89 & 72.* & puiſque l eſt l'unité de δ & que m eſt l'unité de λ, m eſt auſſi l'unité d'un nombre θ qui meſure D & *par Theor. 115.* b eſt à d ce que π eſt à θ.

Par Theor. 85. des nombres bg, $ſr$ qui ont l'unité de b ſont tels que b qui eſt ſemblable à $\varkappa$ eſt une unité de K, que g qui eſt ſemblable à π eſt une unité de B, que $ſ$ qui eſt ſemblable à λ eſt une unité de L & que r qui eſt ſemblable à θ eſt une unité de D. Or *par Theor. 108.* la grandeur meſurée par m eſt meſurée par un nombre dont m eſt l'unité & qui eſt à $\varkappa$ ce que β, ce que ξ, ce que $\varkappa$ eſt à π. La grandeur meſurée par l'unité de b eſt donc auſſi meſurée par un nombre qui a cette unité & qui eſt à b ce que b eſt à g. Le nombre dont m eſt l'unité & qui meſure la grandeur meſurée par m eſt auſſi à λ ce que δ, ce que γ, ce que λ eſt à θ & par conſequent le nombre qui a l'u-

nité de b & qui mesure la grandeur mesurée par cette unité est à $\int$ ce que $\int$ est à r. Soient donc les grandeurs HG, SR telles que h mesure H, que g mesure G, que $\int$ mesure S & que r mesure R. G est à H ce que H est à l'element de G & R est à S ce que S est à l'element de R. G est donc la seconde puissance de H & R est la seconde puissance de S. Or b etant à c ce que β, ce que ξ est à γ, ce que $\varkappa$ est à λ, ce que h est à $\int$, B est à C ce que H est à S & puisque b est à d ce que π est à θ, ce que g est à r, B est à D ce que G est à R.

d est à e ce que b est à c, ce que β, ce que ξ est à γ, d'où il suit que $\varkappa$ est à λ ce que d est à e. Un nombre n qui a l'unité de b est l'unité des nombres $\tau\varepsilon$ qui sont tels que τ qui mesure D est semblable à $\varkappa$ & que ε qui mesure E est semblable à λ *par Theor. 110.* Soient MN des grandeurs telles que m mesure M & que n mesure N. Il paroit encore *par Theor. 96. Cor.* qu'un nombre o qui a l'unité de b est l'unité des nombres $\mu\nu$ qui sont premiers entre eux & tels que μ mesure M & que ν mesure N. Mais puisque $\varkappa\lambda$ sont premiers entre eux, $\tau\lambda$ sont premiers entre eux & λ etant semblable à γ & à δ, $\tau\delta$ sont premiers entre eux, d'où il suit *par Theor. 121.* que $\tau\theta$ sont premiers entre eux. Or *par Theor. 120 & 115.* θ est à τ ce que n est est à m, ce que ν est à μ d'où il suit *par Theor. 110. Cor.* que μ est semblable à τ & à $\varkappa$ & que ν est semblable à θ. Puisque m est l'unité de

de π & que o eſt l'unité de μ, o eſt l'unité d'un nombre ϕ qui meſure B *par Theor. 89 & 72.* & puiſque n eſt l'unité de ε & que o eſt l'unité de ν, o eſt auſſi l'unité d'un nombre η qui meſure E & *par Theor. 115.* b eſt à e ce que ϕ eſt à η.

Par Theor. 85. des nombres $f\,q$ qui ont l'unité de b ſont tels que f qui eſt ſemblable à ϕ eſt une unité de B & que q qui eſt ſemblable à η eſt une unité de E. Or *par Theor. 108.* la grandeur meſurée par o eſt meſurée par un nombre dont o eſt l'unité & qui eſt à μ & à $\varkappa$ ce que π eſt à ϕ. La grandeur meſurée par l'unité de b eſt donc meſurée par un nombre qui a cette unité & qui eſt à b ce que g eſt à f. Le nombre qui meſure la grandeur meſurée par o & dont o eſt l'unité eſt auſſi à ν & à θ ce que ε, ce que λ eſt à η & par conſequent le nombre qui a l'unité de b & qui meſure la grandeur meſurée par cette unité eſt à r ce que f eſt à q. Soient donc les grandeurs F Q telles que f meſure F & que q meſure Q. F eſt à G ce que H eſt à l'element de F & Q eſt à R ce que S eſt à l'element de Q. F eſt donc la troiſieme puiſſance de H & Q eſt la troiſieme puiſſance de S & b etant à e ce que ϕ eſt à η, ce que f eſt à q, B eſt à E ce que F eſt à Q.

THEOREME CLI.

Si le produit d'une ſeconde puiſſance eſt une ſeconde puiſſance, la multipliante eſt une ſeconde puiſſance: ſi le produit d'une troiſieme puiſſance

est une troisieme puissance, la multipliante est une troisieme puissance & ainsi de suite. Soient les grandeurs *DCB* &c. *MLK* &c. telles que *C* soit la seconde puissance de *D*, *B* la troisieme puissance de *D*, &c. que *L* soit la seconde puissance de *M*; *K* la troisieme puissance de *M*, &c. Si *C* est à *L* ce que la grandeur *R* est à l'element de *C*, *R* est une seconde puissance. Si *B* est à *K* ce que la grandeur *Q* est à l'element de *B*, *Q* est une troisieme puissance. &c.

Les grandeurs *DCB* &c. *MLK* &c. etant telles que *C* est la seconde puissance de *D*, que *B* est la troisieme puissance de *D*, &c. que *L* est la seconde puissance de *M*, que *K* est la troisieme puissance de *M*, &c. & que l'une des grandeurs *DCB* &c. est à l'une des grandeurs *MLK* &c. ce que l'une des grandeurs *RQ* &c. est à *T* element de la premiere, il est evident que *DCB* &c. *MLK* &c *RQ* &c. *T* sont egales ou inegales. Ainsi des nombres rationnels *dcbmlkrqt* qui ont la même unité sont tels que *d* mesure *D*, que *c* mesure *C* &c. *C* etant à *D* ce que *D* est à *T*, *c* est à *d* ce que *d* est à *t* & *L* etant à *M* ce que *M* est à *T*, *l* est à *m* ce que *m* est à *t*.

Par Theor. 96. Cor. & 85. un nombre qui mesure *D* & dont l'unité *g* est l'unité de *t* prise un nombre de fois & un nombre qui mesure *M* & dont l'unité *p* est l'unité de *t* prise un nombre de fois sont semblables & tels que *g p* sont premiers entre eux. *c* etant à *d* ce que *d* est à *t*,

à t, il paroit *par Theor. 110.* que d eſt l'unité d'un nombre qui meſure C & qui eſt ſemblable à d, d'où il ſuit *par Theor. 88. Cor. 2.* que d eſt l'unité d'un nombre γ qui eſt une unité de C & qui eſt ſemblable à g. l etant à m ce que m eſt à t, il paroit auſſi que m eſt l'unité d'un nombre qui meſure L & qui eſt ſemblable à m, d'où il ſuit que m eſt l'unité d'un nombre λ qui eſt une unité de L & qui eſt ſemblable à p. Le nombre qui meſure C & dont γ eſt l'unité eſt ſemblable au nombre qui meſure D & dont g eſt l'unité *par Theor. 88.* & le nombre qui meſure L & dont λ eſt l'unité eſt ſemblable au nombre qui meſure M & dont p eſt l'unité. On voit par là que le nombre qui meſure C & dont γ eſt l'unité eſt ſemblable au nombre qui meſure L & dont λ eſt l'unité.

Puiſque d qui eſt une unité de C, eſt l'unité de γ, le nombre dont g eſt l'unité & qui meſure D eſt *par Theor. 89.* une unité de C & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par γ & qui *par Theor. 68.* eſt une unité de C. Il paroit donc *par Theor. 91.* qu'un nombre ξ dont g eſt l'unité & qui eſt ſemblable à γ & à g eſt l'unité d'un nombre qui eſt une unité de C. De même puiſque m qui eſt une unité de L eſt l'unité de λ, le nombre dont p eſt l'unité & qui meſure M eſt une unité de L & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par λ & qui eſt une unité de L. Donc un nombre ϱ dont p eſt l'unité & qui eſt ſemblable à λ & à p

eſt l'unité d'un nombre qui eſt une unité de *L*. Or *par Theor. 116.* *d* eſt à *m* ce que *g* eſt à *p* & *par Theor. 108. Cor. & 111.* γ eſt à λ ce que ξ eſt à ϱ. Donc *par Theor. 118 & 116.* *c* eſt à *l* ce qu'un nombre *f* qui a l'unité de *t* & qui meſure la grandeur meſurée par ξ eſt à un nombre *o* qui a l'unité de *t* & qui meſure la grandeur meſurée par ϱ. *t* eſt donc à *g* ce que ξ, ce que *g* eſt à *f* *par Theor. 108.* & par conſequent la grandeur meſurée par *f* eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *g*. Puiſque *gp* ſont premiers entre eux & que $\xi\varrho$ par conſequent ſont premiers entre eux, *fo* ſont premiers entre eux *par Theor. 121.*

Suppoſé donc que *C* ſoit à *L* ce que *R* eſt à *T*, *r* eſt à *t* ce que *c* eſt à *l*, ce que *f* eſt à *o*, d'où il ſuit *par Theor. 110. Cor.* que *f* eſt le même que *r*. Or *f* meſurant *R*, *R* eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *g*.

B etant à *C* ce que *D* eſt à *T*, *b* eſt à *c* ce que *d* eſt à *t*, d'où il ſuit *par Theor. 110.* que *c* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *d*. *g* etant une unité de *D*, il paroit donc *par Theor. 88. Cor. 2.* que *c* eſt l'unité d'un nombre β qui eſt une unité de *B* & qui eſt ſemblable à *g*. *K* etant à *L* ce que *M* eſt à *T*, *k* eſt à *l* ce que *m* eſt à *t*, & par conſequent *l* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *K* & qui eſt ſemblable à *m* & *p* etant une unité de *M*, *l* eſt l'unité d'un nombre $\varkappa$ qui eſt une unité de *K* & qui eſt ſemblable à *p*. On voit auſſi

par

par Theor. 88. que le nombre qui mesure B & dont β est l'unité est semblable au nombre qui mesure K & dont $\varkappa$ est l'unité.

ξ etant *par Theor.* 72. une unité de C, f est une unité de C *par Theor. 87.* & puisque c qui est une unité de B est l'unité de β, le nombre dont f est l'unité & qui mesure C est *par Theor. 89.* une unité de B & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par β & qui *par Theor. 68.* est une unité de B. Il paroit donc *par Theor. 91.* qu'un nombre π dont f est l'unité & qui est semblable à β & à g est l'unité d'un nombre qui est une unité de B. ϱ etant une unité de L, o est une unité de L & puisque l qui est une unité de K est l'unité de $\varkappa$, le nombre dont o est l'unité & qui mesure L est une unité de K & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par $\varkappa$ & qui est une unité de K, d'où il suit qu'un nombre χ dont o est l'unité & qui est semblable à $\varkappa$ & à p est l'unité d'un nombre qui est une unité de K. Or puisque c est à l ce que f est à o & que *par Theor. 108. Cor. & 111.* β est à $\varkappa$ ce que π est à χ, il s'ensuit *par Theor. 118 & 116.* que b est à k ce qu'un nombre e qui a l'unité de t & qui mesure la grandeur mesurée par π est à un nombre n qui a l'unité de t & qui mesure la grandeur mesurée par χ. t est donc à f ce que π, ce que g est à e *par Theor. 108.* & *par Theor. 111.* t est à g ce que f est à e. La grandeur mesurée par f etant la seconde puissance de la gran-

deur meſurée par g, la grandeur meſurée par e eſt donc la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par g. $g\,p$ etant premiers entre eux, $\pi\,\chi$ ſont premiers entre eux & puiſque $f\,o$ ſont premiers entre eux, $e\,n$ ſont premiers entre eux *par Theor. 121.*

Suppoſé donc que B ſoit à K ce que Q eſt à T, q eſt à t ce que b eſt à k, ce que e eſt à n, d'où il ſuit *par Theor. 110. Cor.* que e eſt le même que q. Or e meſurant Q, Q eſt la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par g.

THEOREME CLII.

Deux grandeurs qui ſont entre elles ce qu'une ſeconde puiſſance eſt à une autre ſeconde puiſſance ſont les produits de deux ſecondes puiſſances multipliées par une même grandeur : deux grandeurs qui ſont entre elles ce qu'une troiſieme puiſſance eſt à une autre troiſieme puiſſance ſont les produits de deux troiſiemes puiſſances multipliées par une même grandeur & ainſi de ſuite. Soient $A\,I$ deux grandeurs. Soient les grandeurs DCB &c. MLK &c. telles que C ſoit la ſeconde puiſſance de D, B la troiſieme puiſſance de D &c. que L ſoit la ſeconde puiſſance de M, K la troiſieme puiſſance de M &c. Si A eſt à I ce que C eſt à L, deux ſecondes puiſſances $F\,O$ ſont telles que A eſt à F ce que la grandeur Q eſt à l'element de A & que I eſt à O ce que Q eſt à l'element de I. Si A eſt à I ce que B eſt

eſt à K, deux troiſiemes puiſſances E N ſont telles que A eſt à E ce que la grandeur R eſt à l'element de A & que I eſt à N ce que R eſt à l'element de I &c.

Les grandeurs $A\,I$, $D\,C\,B$ &c. $M\,L\,K$ &c. etant telles que C eſt la ſeconde puiſſance de D, que B eſt la troiſieme puiſſance de D &c. que L eſt la ſeconde puiſſance de M, que K eſt la troiſieme puiſſance de M &c. & que A eſt à I ce que l'une des grandeurs $C\,B$ &c. eſt à l'une des grandeurs $L\,K$ &c. il. eſt evident que $A\,I$ ſont egales ou inegales & que $D\,C\,B$ &c. $M\,L\,K$ &c. ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels $a\,i$ qui ont la même unité & des nombres rationnels $d\,c\,b\,m\,l\,k$ qui ont la même unité ſont tels que a meſure A, que i meſure I &c. L'unité de a meſure une grandeur T meſurée par un nombre t qui a l'unité de a & l'unité de d meſure une grandeur V meſurée par un nombre u qui a l'unité de d.

Par Theor. 96. Cor. & 85. un nombre qui meſure D & dont l'unité g eſt l'unité de d priſe un nombre de fois & un nombre qui meſure M & dont l'unité p eſt l'unité de d priſe un nombre de fois ſont ſemblables & tels que $g\,p$ ſont premiers entre eux. C etant à D ce que D eſt à V, il paroit *par Theor. 110.* que d eſt l'unité d'un nombre qui meſure C & qui eſt ſemblable à d, d'où il ſuit *par Theor. 88. Cor. 2.* que d eſt l'unité d'un nombre γ qui eſt une unité de C & qui eſt ſemblable à g. De même L

etant à M ce que M eſt à V, m eſt l'unité d'un nombre qui meſure L & qui eſt ſemblable à m, d'où il ſuit que m eſt l'unité d'un nombre λ qui eſt une unité de L & qui eſt ſemblable à p.

Puisque d qui eſt une unité de C eſt l'unité de γ, le nombre dont g eſt l'unité & qui meſure D eſt *par Theor. 89.* une unité de C & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par γ & qui *par Theor. 68.* eſt une unité de C. Il paroit donc *par Theor. 91.* qu'un nombre ξ dont g eſt l'unité & qui eſt ſemblable à γ & à g eſt l'unité d'un nombre qui eſt une unité de C. De même puisque m qui eſt une unité de L eſt l'unité de λ, le nombre dont p eſt l'unité & qui meſure M eſt une unité de L & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par λ & qui eſt une unité de L. Donc un nombre ϱ dont p eſt l'unité & qui eſt ſemblable à λ & à p eſt l'unité d'un nombre qui eſt une unité de L.

Or *par Theor. 116.* d eſt à m ce que g eſt à p & le nombre qui meſure C & dont d eſt l'unité eſt au nombre qui meſure L & dont m eſt l'unité ce que d eſt à m, ce que g eſt à p, ce que ξ eſt à ϱ. Donc *par Theor. 118.* c eſt à l ce qu'un nombre f qui a l'unité de d & qui meſure la grandeur meſurée par ξ eſt à un nombre o qui a l'unité de d & qui meſure la grandeur meſurée par ϱ. u eſt donc à g ce que ξ, ce que g eſt à f *par Theor. 108.* La grandeur meſurée par f eſt donc la ſeconde puiſſance de la

gran-

grandeur meſurée par g. u eſt à p ce que ϱ ce que p eſt à o & par conſequent o eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par p. Puisque $g\,p$ ſont premiers entre eux & que par conſequent $\xi\,\varrho$ ſont premiers entre eux, $f\,o$ ſont premiers entre eux *par Theor. 121.*

Suppoſé donc que A ſoit à I ce que C eſt à L, a eſt à i ce que c eſt à l, ce que f eſt à o, d'où il ſuit *par Theor. 110 & 85.* que deux nombres qui ont l'unité de a & dont l'un eſt ſemblable à f & l'autre à o ſont les unitez de deux nombres ſemblables dont l'un meſure A & l'autre meſure I. Un nombre q qui a l'unité de a eſt *par Theor. 85.* ſemblable au nombre qui meſure A & dont l'unité eſt ſemblable à f. t eſt donc au nombre qui a l'unité de a & qui eſt ſemblable à f ce que q eſt à a *par Theor. 108.* & t eſt au nombre qui a l'unité de a & qui eſt ſemblable à o ce que q eſt à i. Soient $F\,O\,Q$ des grandeurs telles que le nombre qui a l'unité de a & qui eſt ſemblable à f meſure F, que le nombre qui a l'unité de a & qui eſt ſemblable à o meſure O & que q meſure Q. A eſt à F ce que Q eſt à T, I eſt à O ce que Q eſt à T & il eſt evident que F & O ſont de ſecondes puiſſances.

B etant à C ce que D eſt à V, il paroit *par Theor. 110.* que c eſt l'unité d'un nombre qui meſure B & qui eſt ſemblable à d, d'où il ſuit *par Theor. 88. Cor. 2.* que c eſt l'unité d'un nombre β qui eſt une unité de B & qui eſt ſem-

semblable à *g*. De même *K* etant à *L* ce que *M* est à *V*, *l* est l'unité d'un nombre qui mesure *K* & qui est semblable à *m* & *l* est l'unité d'un nombre *κ* qui est une unité de *K* & qui est semblable à *p*.

ξ etant *par Theor.* 72. une unité de *C*, *f* est une unité de *C par Theor.* 87. & puisque *c* qui est une unité de *B* est l'unité de *β*, le nombre dont *f* est l'unité & qui mesure *C* est *par Theor.* 89. une unité de *B* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *β* & qui *par Theor.* 68. est une unité de *B*. Il paroit donc *par Theor.* 91. qu'un nombre *π* dont *f* est l'unité & qui est semblable à *β* & à *g* est l'unité d'un nombre qui est une unité de *B*. De même *ρ* etant une unité de *L*, *o* est une unité de *L* & puisque *l* qui est une unité de *K* est l'unité de *κ*, le nombre dont *o* est l'unité & qui mesure *L* est une unité de *K* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *κ* & qui est une unité de *K*. Donc un nombre *χ* dont *o* est l'unité & qui est semblable à *κ* & à *p* est l'unité d'un nombre qui est une unité de *K*.

Or *c* est à *l* ce que *f* est à *o* & le nombre qui mesure *B* & donc *c* est l'unité est au nombre qui mesure *K* & dont *l* est l'unité ce que *d* est à *m*, ce que *g* est à *p*, ce que *π* est à *χ*. Donc *par Theor.* 118. *b* est à *k* ce qu'un nombre *e* qui a l'unité de *d* & qui mesure la grandeur mesurée par *π* est à un nombre *n* qui a l'unité de *d* & qui mesure la grandeur mesurée par *χ*. *u* est

à *f* ce que *π*, ce que *g* eſt à *e par Theor. 108.* & *par Theor. 111.* *π* eſt à *g* ce que *f* eſt à *e*. La grandeur meſurée par *f* etant la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *g*, la grandeur meſurée par *e* eſt donc la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par *g*. *u* eſt à *o* ce que *χ*, ce que *p* eſt à *n* & par conſequent *u* eſt à *p* ce que *o* eſt à *n* & puisque la grandeur meſurée par *o* eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *p*, la grandeur meſurée par *n* eſt la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par *p*. Puisque *f o* ſont premiers entre eux & que *g p* etant premiers entre eux, *π χ* ſont auſſi premiers entre eux, *e n* ſont premiers entre eux *par Theor. 121.*

Suppoſé donc que *A* ſoit à *I* ce que *B* eſt à *K*, *a* eſt à *i* ce que *b* eſt à *k*, ce que *e* eſt à *n*, d'où il ſuit *par Theor. 110 & 85.* que deux nombres qui ont l'unité de *a* & dont l'un eſt ſemblable à *e* & l'autre à *n* ſont les unitez de deux nombres ſemblables dont l'un meſure *A* & l'autre meſure *I*. Un nombre *r* qui a l'unité de *a* eſt *par Theor. 85.* ſemblable au nombre qui meſure *A*, & dont l'unité eſt ſemblable à *e*. *t* eſt donc au nombre qui a l'unité de *a* & qui eſt ſemblable à *e* ce que *r* eſt à *a* & *t* eſt au nombre qui a l'unité de *a* & qui eſt ſemblable à *n* ce que *r* eſt à *i*. Soient donc *ENR* des grandeurs telles que le nombre qui a l'unité de *a* & qui eſt ſemblable à *e* meſure *E*, que le nombre qui a l'unité de *a* & qui eſt ſemblable à *n* meſure *N* & que *r* meſure *R*. *A* eſt à *E* ce que *R* eſt

R eſt à *T*, *I* eſt à *N* ce que *R* eſt à *T* & il eſt evident que *E* & *N* ſont de troiſiemes puiſſances.

COROLLAIRE.

On voit auſſi que ſi deux nombres ſont entre eux ce que deux puiſſances numeriques ſecondes, troiſiemes &c. ſont entre elles, ces nombres ſont les produits de deux puiſſances numeriques ſecondes, troiſiemes &c. multipliées par des nombres ſemblables. D'où il ſuit 1°. que ſi deux nombres premiers entre eux ſont l'un à l'autre ce que deux puiſſances numeriques ſecondes, troiſiemes &c. ſont entre elles, ces deux nombres ſont des puiſſances numeriques ſecondes, troiſiemes &c. 2°. que ſi deux grandeurs meſurées par des puiſſances numeriques ſecondes, troiſiemes &c. qui ont la même unité, ſont auſſi meſurées par des nombres premiers entre eux qui ayent la même unité, ces nombres ſont *par Theor. 126.* des puiſſances numeriques ſecondes, troiſiemes &c.

THEOREME CLIII.

Si une grandeur eſt moindre qu'une autre, la ſeconde puiſſance de la premiere grandeur eſt moindre que la ſeconde puiſſance de la ſeconde grandeur, la troiſieme puiſſance de la premiere grandeur eſt moindre que la troiſieme puiſſance de la ſeconde grandeur & ainſi de ſuite. Soient les grandeurs *MLK* &c. *DCB* &c. telles que *L* ſoit la ſeconde puiſſance de *M*, *K* la troiſieme puiſſance de *M* &c. que *C* ſoit la ſeconde puiſſance de

D, *B*

D, *B* la troisieme puissance de *D* &c. Si *M* est moindre que *D*, *L* est moindre que *C*, *K* est moindre que *B* &c.

Les grandeurs *MLK* &c. *DCB* &c. etant telles que *L* est la seconde puissance de *M*, *K* la troisieme puissance de *M* &c. que *C* est la seconde puissance de *D*, *B* la troisieme puissance de *D* &c. & que *M* est moindre que *D*, il est evident que *MLK* &c. *DCB* &c. sont egales ou inegales. Ainsi des nombres rationnels *m l k d c b* qui ont la même unité sont tels que *m* mesure *M*, que *l* mesure *L* &c. L'unité de *m* mesure une grandeur *T* mesurée par un nombre *t* qui a l'unité de *m*.

L etant à *M* ce que *M* est à *T*, il paroit *par Theor. 110.* que *m* est l'unité d'un nombre λ qui mesure *L* & qui est semblable à *m*. *C* etant à *D* ce que *D* est à *T*, *d* est aussi l'unité d'un nombre qui mesure *C* & qui est semblable à *d*. Or puisque *M* est moindre que *D*, *m* mesure une partie de *D* par le cinquieme & le second Corollaire du Lemme. Donc *par Theor. 82.* *d* est l'unité d'un nombre ξ qui mesure une partie de *C* & qui est semblable à *m* & à λ, d'où il suit *par Theor. 78.* que *L* est moindre que la grandeur mesurée par ξ & par consequent moindre que *C*.

K etant à *L* ce que *M* est à *T*, *l* est *par Theor. 110.* l'unité d'un nombre κ qui mesure *K* & qui est semblable à *m*. *B* etant à *C* ce que *D* est à

eſt à T, c eſt l'unité d'un nombre qui meſure B & qui eſt ſemblable à d. Puiſque M etant moindre que D, m meſure une partie de D, c eſt *par Theor.* 82. l'unité d'un nombre π qui meſure une partie de B & qui eſt ſemblable à m & à κ. Or l'on a vû que L eſt moindre que C. Donc *par Theor.* 78. K eſt moindre que la grandeur meſurée par π & par conſequent moindre que B.

COROLLAIRE.

Si M eſt egale à D, L etant à M ce que M eſt à T & C etant à D ce que D eſt à T, L eſt donc à M ce que C eſt à D, d'où il ſuit *par Theor.* 132. que L eſt egale à C. K etant à L ce que M eſt à T & B etant à C ce que D eſt à T, on prouvera donc auſſi que K eſt egale à B. Les racines etant egales, les ſecondes puiſſances ſont egales, les troiſiemes puiſſances ſont egales & ainſi de ſuite.

THEOREME CLIV.

Si de quatre ſecondes puiſſances ou de quatre troiſiemes puiſſances & ainſi de ſuite, la premiere eſt à la ſeconde ce que la troiſieme eſt à la quatrieme, la racine de la premiere eſt à la racine de la ſeconde ce que la racine de la troiſieme eſt à la racine de la quatrieme. Soient les grandeurs CBA &c. IHG &c. PON &c. VUT &c. telles que B ſoit la ſeconde puiſſance de C, A la troiſieme puiſſance de C &c. que H ſoit la ſeconde puiſſance de I, G la troiſieme puiſſance de I &c. que

que *O* ſoit la ſeconde puiſſance de *P*, *N* la troiſieme puiſſance de *P* &c. que *U* ſoit la ſeconde puiſſance de *V*, *T* la troiſieme puiſſance de *V* &c. Si *B* eſt à *H* ce que *O* eſt à *U*, *C* eſt à *I* ce que *P* eſt à *V*. Si *A* eſt à *G* ce que *N* eſt à *T*, *C* eſt à *I* ce que *P* eſt à *V* &c.

Les grandeurs *CBA* &c. *IHG* &c. *PON* &c. *VUT* &c. etant telles que *B* eſt la ſeconde puiſſance de *C*, *A* la troiſieme puiſſance de *C* &c. que *H* eſt la ſeconde puiſſance de *I*, *G* la troiſieme puiſſance de *I* &c. que *O* eſt la ſeconde puiſſance de *P*, *N* la troiſieme puiſſance de *P* &c. que *U* eſt la ſeconde puiſſance de *V*, *T* la troiſieme puiſſance de *V* &c. & que l'une des grandeurs *BA* &c. eſt à l'une des grandeurs *HG* &c. ce que l'une des grandeurs *ON* &c. eſt à l'une des grandeurs *UT* &c. il s'enſuit que *CBA* &c. *IHG* &c. ſont egales ou inegales & que *PON*&c. *VUT* &c. ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *c b a i h g* qui ont la même unité ſont tels que *c* meſure *C*, que *b* meſure *B* &c. & des nombres rationnels *p o n v u t* qui ont la même unité ſont tels que *p* meſure *P*, que *o* meſure *O* &c.

Par Theor. 96. Cor. & 85. un nombre qui meſure *C* & dont l'unité *f* eſt l'unité de *c* priſe un nombre de fois & un nombre qui meſure *I* & dont l'unité *m* eſt l'unité de *c* priſe un nombre de fois ſont ſemblables & tels que *f m* ſont premiers entre eux. *B* etant à *C* ce que *C* eſt à l'element de *B*, *c* eſt *par Theor. 110.* l'unité

 d'un

d'un nombre qui mesure *B* & qui est semblable à *c*, d'où il suit *par Theor. 88. Cor. 2.* que *c* est l'unité d'un nombre *β* qui est une unité de *B* & qui est semblable à *f*. De même *H* etant à *I* ce que *I* est à l'element de *H*, *i* est l'unité d'un nombre qui mesure *H* & qui est semblable à *i*, d'où il suit que *i* est l'unité d'un nombre *κ* qui est une unité de *H* & qui est semblable à *m*.

Puisque *c* qui est une unité de *B* est l'unité de *β*, le nombre qui mesure *C* & dont *f* est l'unité est *par Theor. 89.* une unité de *B* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *β* & qui *par Theor. 68.* est une unité de *B*. Il paroit donc *par Theor. 91.* qu'un nombre *π* dont *f* est l'unité & qui est semblable à *β* & à *f* est l'unité d'un nombre qui est une unité de *B*. De même, puisque *i* qui est une unité de *H* est l'unité de *κ*, le nombre qui mesure *I* & dont *m* est l'unité est une unité de *H* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *κ* & qui est une unité de *H*. Donc un nombre *χ* dont *m* est l'unité & qui est semblable à *κ* & à *m* est l'unité d'un nombre qui est une unité de *H*.

c est à *i* ce que *f* est à *m* *par Theor. 116.* & le nombre qui mesure *B* & dont *c* est l'unité est au nombre qui mesure *H* & dont *i* est l'unité ce que *c* est à *i*, ce que *f* est à *m*, ce que *π* est à *χ*. Donc *par Theor. 118. b* est à *b* ce qu'un nombre *e* qui a l'unité de *c* & qui mesure la grandeur mesurée par *π* est à un nombre *l* qui a l'unité de *c* & qui mesure la grandeur mesurée

par

par χ. *f m* etant premiers entre eux, $\pi\chi$ ſont premiers entre eux, d'où il ſuit *par Theor. 121.* que *e l* ſont premiers entre eux. L'unité de *c* etant à *f* ce que π, ce que *f* eſt à *e par Theor. 108.* la grandeur meſurée par *e* eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *f*. La grandeur meſurée par *l* eſt auſſi la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *m*.

On prouvera donc auſſi que des nombres *ſ r*, *z y* qui ont l'unité de *p*, ſont tels que *p* eſt à *v* ce que *ſ* eſt à *z*, que *o* eſt à *u* ce que *r* eſt à *y*, que *r y* ſont premiers entre eux, que la grandeur meſurée par *r* eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *ſ* & que la grandeur meſurée par *y* eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *z*.

Suppoſé donc que *B* ſoit à *H* ce que *O* eſt à *U*, *b* eſt à *h* ce que *o* eſt à *u* & par conſequent *e* eſt à *l* ce que *r* eſt à *y*, d'où il ſuit *par Theor. 110. Cor.* que *e* eſt ſemblable à *r* & que *l* eſt ſemblable à *y*. Donc *par Theor. 88. Cor.* 2. un nombre ϕ qui a l'unité de *p* & qui eſt ſemblable à *f* eſt l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *r* & qui *par Theor. 88.* eſt ſemblable à π, à *f* & à ϕ. On voit donc que la grandeur meſurée par *r* eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par ϕ. Il paroit donc par le Theoreme precedent que la grandeur meſurée par *ſ* eſt egale à la grandeur meſurée par ϕ, d'où il ſuit par le ſecond Corollaire du Lemme que *ſ* eſt ſemblable à ϕ & à *f*.

On prouvera de même que z est semblable à *m*. *p* est donc à *v* ce que *f* est à *m*, ce que *c* est à *i* & par consequent *C* est à *I* ce que *P* est à *V*.

A etant à *B* ce que *C* est à l'element de *A*, *b* est *par Theor. 110.* l' unité d'un nombre qui mesure *A* & qui est semblable à *c*, d'où il suit *par Theor. 88. Cor. 2.* que *b* est l'unité d'un nombre *α* qui est une unité de *A* & qui est semblable à *f*. De même *G* etant à *H* ce que *I* est à l'element de *G*, *b* est l'unité d'un nombre qui mesure *G* & qui est semblable à *i*, d'où il suit que *b* est l'unité d'un nombre *γ* qui est une unité de *G* & qui est semblable à *m*.

π etant *par Theor. 72.* une unité de *B*, *e* est une unité de *B* *par Theor. 87.* & puisque *b* qui est une unité de *A*, est l'unité de *α*, le nombre qui mesure *B* & dont *e* est l'unité est *par Theor. 89.* une unité de *A* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *α* & qui *par Theor. 68.* est une unité de *A*. Il paroit donc *par Theor. 91.* qu'un nombre *η* dont *e* est l'unité & qui est semblable à *α* & à *f*, est l'unité d'un nombre qui est une unité de *A*. De même *χ* etant une unité de *H*, *l* est une unité de *H* & puisque *b* qui est une unité de *G* est l'unité de *γ*, le nombre qui mesure *H* & dont *l* est l'unité, est une unité de *G* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *γ* & qui est une unité de *G*. Donc un nombre *ξ* dont *l* est l'unité & qui est semblable à *γ* & à *m*, est l'unité d'un nombre qui est une unité de *G*.

b etant

b etant à *b* ce que *e* eſt à *l* & le nombre qui meſure *A* & dont *b* eſt l'unité etant au nombre qui meſure *G* & dont *b* eſt l'unité ce que *c* eſt à *i*, ce que *f* eſt à *m*, ce que η eſt à ξ, il s'enſuit *par Theor. 118.* que *a* eſt à *g* ce qu'un nombre *d* qui a l'unité de *c* & qui meſure la grandeur meſurée par η, eſt à un nombre *k* qui a l'unité de *c* & qui meſure la grandeur meſurée par ξ. *e l* etant premiers entre eux & $\eta\,\xi$ etant auſſi premiers entre eux parceque *f m* ſont premiers entre eux, il s'enſuit que *d k* ſont premiers entre eux *par Theor. 121.* L'unité de *c* eſt à *e* ce que η, ce que *f* eſt à *d par Theor. 108.* d'où il ſuit *par Theor. 111.* que l'unité de *c* eſt à *f* ce que *e* eſt à *d* & la grandeur meſurée par *e* etant la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par *f*, la grandeur meſurée par *d* eſt la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par *f*. La grandeur meſurée par *k* eſt auſſi la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par *m*.

On prouvera donc auſſi que des nombres *q x* qui ont l'unité de *p* ſont tels que *n* eſt à *t* ce que *q* eſt à *x*, que *q x* ſont premiers entre eux, que la grandeur meſurée par *q* eſt la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par *ſ* & que la grandeur meſurée par *x* eſt la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par z.

Suppoſé donc que *A* ſoit à *G* ce que *N* eſt à *T*, *a* eſt à *g* ce que *n* eſt à *t* & par conſequent *d* eſt à *k* ce que *q* eſt à *x*, d'où il ſuit *par Theor. 110. Cor.* que *d* eſt ſemblable à *q* &

que *k* eſt ſemblable à *x*. Donc *par Theor. 88. Cor. 2.* un nombre qui a l'unité de *p* & qui eſt ſemblable à *e*, eſt l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par *q* & qui *par Theor. 88.* eſt ſemblable à *ɲ*, à *f* & à Φ. La grandeur meſurée par ce nombre qui eſt ſemblable à *e* etant la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par Φ, la grandeur meſurée par *q* eſt donc la troiſieme puiſſance de la grandeur meſurée par Φ. Il paroit donc par le Theoreme precedent que la grandeur meſurée par *ſ* eſt egale à la grandeur meſurée par Φ d'où il ſuit que *ſ* eſt ſemblable à Φ & à *f*. On prouvera de même que z eſt ſemblable à *m*. *p* eſt donc à *v* ce que *f* eſt à *m*, ce que *c* eſt à *i* & par conſequent *C* eſt à *I* ce que *P* eſt à *V*.

COROLLAIRE I.

Suppoſé que *C* ſoit à *I* ce que *P* eſt à *V*, *c* etant l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *c*, il paroit *par Theor. 118.* que *B* eſt à *H* ce que *O* eſt à *U*. Donc *b* etant l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *c*, il paroit auſſi que *A* eſt à *G* ce que *N* eſt à *T* &c. De quatre ſecondes puiſſances ou de quatre troiſiemes puiſſances & ainſi de ſuite, la premiere eſt à la ſeconde ce que la troiſieme eſt à la quatrieme, ſi la racine de la premiere eſt à la racine de la ſeconde ce que la racine de la troiſieme eſt à la racine de la quatrieme.

COROL-

COROLLAIRE II.

Supposé que *B* soit à *H* ce que *O* est à une grandeur *T* mesurée par l'unité de *c*. Cette unité est l'unité d'un nombre *t* qui mesure *T* & *t* est l'unité d'un nombre *s* qui mesure *T*, ce qui fait voir que *T* est la seconde puissance de *T*. Donc *C* est à *I* ce que *P* est à *T*. Supposé que *A* soit à *G* ce que *N* est à *T*. *s* est l'unité d'un nombre *r* qui mesure *T*, ce qui fait voir que *T* est la troisieme puissance de *T*. Donc *C* est à *I* ce que *P* est à *T* &c. Si de trois secondes puissances ou de trois troisiemes puissances & ainsi de suite, la premiere est le produit de la seconde multipliée par la troisieme, la racine de la premiere est le produit de la racine de la seconde, multipliée par la racine de la troisieme.

COROLLAIRE III.

T etant la seconde, la troisieme puissance de *T* &c. si *C* est à *I* ce que *P* est à *T*, il suit du premier Corollaire que *B* est à *H* ce que *O* est à *T*, que *A* est à *G* ce que *N* est à *T* &c. De trois secondes puissances ou de trois troisiemes puissances & ainsi de suite, la premiere est le produit de la seconde multipliée par la troisieme, si la racine de la premiere est le produit de la racine de la seconde, multipliée par la racine de la troisieme.

THEOREME CLV.

Le produit d'une grandeur multipliée par une autre est une seconde puissance, si la grandeur mul-

multipliée & la multipliante sont entre elles ce qu'une seconde puissance est à une autre seconde puissance. Soient les grandeurs *BCD* telles que *B* soit à *C* ce que *D* est à l'element de *B*. Si *C* est à *D* ce qu'une seconde puissance est à une autre, *B* est une seconde puissance.

. Les grandeurs *B C D* etant telles que *B* est à *C* ce que *D* est à *T* element de *B* & que *C* est à *D* ce qu'une seconde puissance est à une autre seconde puissance, des grandeurs *ML*, *ON* sont telles que *L* est la seconde puissance de *M*, que *N* est la seconde puissance de *O*, que *C* est à *L* ce qu'une grandeur *Q* est à l'element de *C* & que *D* est à *N* ce que *Q* est à l'element de *D* *par Theor.* 152. *B C D*, *M L*, *ON*, *T* etant donc egales ou inegales, les nombres rationnels *b c d m l o n t* qui ont la même unité sont tels que *b* mesure *B*, que *c* mesure *C* &c. que *b* est à *c* ce que *d* est à *t*, que *c* est à *l* ce que *q* est à *t* & que *d* est à *n* ce que *q* est à *t*.

c est *par Theor.* 110. l'unité d'un nombre qui mesure *B* & qui est semblable à *d* & *n* etant l'unité d'un nombre qui mesure *D* & qui est semblable à *q*, il s'ensuit *par Theor.* 88. *Cor.* 2. qu'un nombre *β* dont *c* est l'unité & qui est semblable à *n* est l'unité d'un nombre qui mesure *B* & qui *par Theor.* 88. est semblable à *q*. *l* est aussi l'unité d'un nombre qui mesure *C* & qui est semblable à *q*. Ce nombre qui mesure *C* & dont *l* est l'unité est donc *par Theor.* 89. une unité de *B* & l'unité d'un nombre qui mesure la gran-

grandeur meſurée par β & qui *par Theor. 68.* eſt une unité de B. Or puisqu'un nombre dont l eſt l'unité & qui eſt ſemblable à q eſt l'unité d'un nombre qui etant ſemblable à β eſt l'unité d'un autre nombre qui meſure B & qui eſt ſemblable à q, il paroit *par Theor. 91.* qu'un nombre Π dont l'unité π eſt l priſe un nombre de fois eſt tel que π eſt ſemblable à β & à n, que Π eſt ſemblable à q & que Π eſt l'unité d'un nombre qui meſure B & qui eſt ſemblable à q. Soit G une grandeur meſurée par π. G eſt meſurée par un nombre g qui a l'unité de b.

o eſt l'unité d'un nombre qui meſure N & qui eſt ſemblable à o. π etant ſemblable à n, il s'enſuit *par Theor. 88. Cor. 2.* qu'un nombre γ dont l eſt l'unité & qui eſt ſemblable à o eſt l'unité d'un nombre qui meſure G & qui *par Theor. 88.* eſt ſemblable à o. m eſt auſſi l'unité d'un nombre qui meſure L & qui eſt ſemblable à m. Ce nombre qui meſure L & dont m eſt l'unité eſt donc *par Theor. 89.* une unité de G & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par γ & qui *par Theor. 68.* eſt une unité de G. Or puisqu'un nombre dont m eſt l'unité & qui eſt ſemblable à m eſt l'unité d'un nombre qui etant ſemblable à γ eſt l'unité d'un autre nombre qui meſure G & qui eſt ſemblable à o, il paroit *par Theor. 91.* qu'un nombre Ξ dont l'unité ξ eſt m priſe un nombre de fois eſt tel que ξ eſt ſemblable à γ & à o, que Ξ eſt ſemblable à m & que Ξ eſt l'unité d'un nombre

 qui

qui mesure *G* & qui est semblable à *o*. La grandeur mesurée par *ξ* est mesurée par un nombre *h* qui a l'unité de *b* & *ξ* etant *par Theor.* 72. une unité de *G*, il s'ensuit *par Theor.* 87. que *h* est l'unité d'un nombre *χ* qui mesure *G*. Or puisque *G* est mesurée par un nombre qui est semblable à *o* & dont l'unité Ξ est semblable à *m* & que *o* est semblable à *ξ* dont *m* est l'unité il s'ensuit *par Theor.* 86. que *χ* est semblable à *h*.

π etant *par Theor.* 72. une unité de *B*, *g* est une unité de *B par Theor.* 87. & *g* est aussi l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par Π. Donc *par Theor.* 89. *χ* est une unité de *B* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par Π & qui *par Theor.* 68. est une unité de *B*. Or puisque *χ* dont *h* est l'unité, est l'unité d'un nombre qui etant semblable à Π est l'unité d'un autre nombre qui mesure *B* & qui est semblable à *q*, il paroit *par Theor.* 91. qu'un nombre Ψ dont l'unité ⏊ est *h* prise un nombre de fois est tel que ⏊ est semblable à Π & à *q*, que Ψ est semblable à *χ* & à *h* & que Ψ est l'unité d'un nombre qui mesure *B* & qui est semblable à *q*. La grandeur mesurée par ⏊ est mesurée par un nombre *f* qui a l'unité de *b* & ⏊ etant *par Theor.* 72. une unité de *B*, il s'ensuit *par Theor.* 87. que *f* est l'unité d'un nombre Φ qui mesure *B*. Or puisque *B* est mesurée par un nombre qui est semblable à *q* & dont l'unité Ψ est semblable à *h* & que *q* est semblable à ⏊ dont *h* est l'unité, il

il s'enſuit *par Theor. 86.* que ϕ eſt ſemblable à f. Donc *par Theor. 108.* t eſt à f ce que ϕ, ce que f eſt à b & par conſequent B eſt la ſeconde puiſſance de la grandeur meſurée par f.

THEOREME CLVI.

Le produit d'une troiſieme puiſſance multipliée par une troiſieme puiſſance eſt une troiſieme puiſſance : le produit d'une quatrieme puiſſance multipliée par une quatrieme puiſſance eſt une quatrieme puiſſance & ainſi de ſuite. Soient les grandeurs $HGFE$ &c. $MLKI$ &c. telles que G ſoit la ſeconde puiſſance de H, F la troiſieme puiſſance de H, E la quatrieme puiſſance de H &c. que L ſoit la ſeconde puiſſance de M, K la troiſieme puiſſance de M, I la quatrieme puiſſance de M &c. Si la grandeur A eſt à F ce que K eſt à l'element de A, A eſt une troiſieme puiſſance. Si A eſt à E ce que I eſt à l'element de A, A eſt une quatrieme puiſſance &c.

Les grandeurs $HGFE$ &c. $MLKI$ &c. etant telles que G eſt la ſeconde, F la troiſieme, E la quatrieme puiſſance de H &c. que L eſt la ſeconde, K la troiſieme, I la quatrieme puiſſance de M &c. & que la grandeur A eſt à l'une des grandeurs FE &c. ce que l'une des grandeurs KI &c. eſt à T element de A, il s'enſuit que A, $HGFE$ &c. $MLKI$ &c. T ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels $abgfemlkit$ qui ont la même unité ſont tels que a meſure A, que b meſure H &c.

Suppo-

Supposé que A soit à F ce que K est à T, a est à f ce que k est à t. f est donc *par Theor. 110.* l'unité d'un nombre qui mesure A & qui est semblable à k. Or l est aussi l'unité d'un nombre qui mesure K & qui est semblable à m. Donc *par Theor. 88. Cor. 2.* un nombre α dont f est l'unité & qui est semblable à l est l'unité d'un nombre qui mesure A & qui *par Theor. 88.* est semblable à m. g est aussi l'unité d'un nombre qui mesure F & qui est semblable à h. Ce nombre qui mesure F & dont g est l'unité est donc *par Theor. 89.* une unité de A & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par α & qui *par Theor. 68.* est une unité de A. Or puisqu'un nombre dont g est l'unité & qui est semblable à h est l'unité d'un nombre qui etant semblable à α est l'unité d'un autre nombre qui mesure A & qui est semblable à m, il paroit *par Theor. 91.* qu'un nombre Γ dont l'unité γ est g prise un nombre de fois est tel que γ est semblable à α & à l, que Γ est semblable à h & que Γ est l'unité d'un nombre qui mesure A & qui est semblable à m.

La grandeur mesurée par γ est mesurée par un nombre c qui a l'unité de t & *par Theor. 108.* t est à g ce que γ, ce que l est à c. Soit C une grandeur mesurée par c. C est donc à L ce que G est à T, d'où il suit *par Theor. 155 & 154. Cor. 2.* que C est une seconde puissance dont la racine D est à M ce que H est à T. Un nombre qui est semblable à m & qui a l'unité d'un

d'un nombre rationnel *d* qui mesure *D*, est donc l'unité d'un nombre qui mesure *D* & qui est semblable à *b*. Or *γ* etant *par Theor.* 72. une unité de *A*, *c* est *par Theor.* 87. l'unité d'un nombre *δ* qui mesure *A* & puisque *A* est mesurée par un nombre qui est semblable à *m* & dont l'unité Γ est semblable à *b* & qu'un nombre qui a l'unité de *d* & qui est semblable à *m* est l'unité d'un nombre qui mesure *D* & qui est semblable à *b*, il s'ensuit *par Theor.* 85 & 86. que *δ* est semblable à *d*. *t* est donc à *c* ce que *δ*, ce que *d* est à *a* & par consequent *t* est à *d* ce que *c* est à *a*. *A* est donc à *C* ce que *D* est à *T* & puisque *C* est la seconde puissance de *D*, *A* est la troisieme puissance de *D*.

Supposé que *A* soit à *E* ce que *I* est à *T*, *a* est à *e* ce que *i* est à *t*. *e* est donc l'unité d'un nombre qui mesure *A* & qui est semblable à *i*. Or *k* est aussi l'unité d'un nombre qui mesure *I* & qui est semblable à *m*. Donc *par Theor.* 88. *Cor.* 2. un nombre *η* dont *e* est l'unité & qui est semblable à *k* est l'unité d'un nombre qui mesure *A* & qui *par Theor.* 88. est semblable à *m*. *f* est aussi l'unité d'un nombre qui mesure *E* & qui est semblable à *b*. Ce nombre qui mesure *E* & dont *f* est l'unité est donc *par Theor.* 89. une unité de *A* & l'unité d'un nombre qui mesure la grandeur mesurée par *η* & qui *par Theor.* 68. est une unité de *A*. Or puisqu'un nombre dont *f* est l'unité & qui est semblable à *b* est l'unité d'un nombre qui etant semblable à *η*

est

eſt l'unité d'un autre nombre qui meſure A & qui eſt ſemblable à m, il paroit *par Theor. 91.* qu'un nombre Θ dont l'unité θ eſt f priſe un nombre de fois eſt tel que θ eſt ſemblable à η & à k, que Θ eſt ſemblable à h & que Θ eſt l'unité d'un nombre qui meſure A & qui eſt ſemblable à m.

La grandeur meſurée par θ eſt meſurée par un nombre b qui a l'unité de t & *par Theor. 108.* t eſt à f ce que θ, ce que k eſt à b. Soit B une grandeur meſuré par b. B eſt à K ce que F eſt à T. Ce que l'on vient de prouver fait donc voir que B eſt une troiſieme puiſſance dont D eſt la racine. Or θ etant *par Theor. 72.* une unité de A, b eſt *par Theor. 87.* l'unité d'un nombre λ qui meſure A & puiſque A eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à m & dont l'unité Θ eſt ſemblable à h, λ eſt ſemblable à d. t eſt donc à b ce que λ, ce que d eſt à a & par conſequent t eſt à d ce que b eſt à a. A eſt donc à B ce que D eſt à T & puiſque B eſt la troiſieme puiſſance de D, A eſt la quatrieme puiſſance de D.

THEOREME CLVII.

Si deux racines ont une même unité, les ſecondes puiſſances ont une même unité, les troiſiemes puiſſances ont une même unité & ainſi de ſuite. Soient les grandeurs DCB &c. MLK &c. telles que C ſoit la ſeconde puiſſance de D, B la troiſieme puiſſance de D &c. que L ſoit la ſeconde puiſ-

puiſſance de *M*, *K* la troiſieme puiſſance de *M* &c. Si *D* & *M* ont une même unité, *C* & *L* ont une même unité, *B* & *K* ont une même unité &c.

Les grandeurs *D C B* &c. *M L K* &c. etant telles que *C* eſt la ſeconde, *B* la troiſieme puiſſance de *D* &c. que *L* eſt la ſeconde, *K* la troiſieme puiſſance de *M* &c. & que *D* & *M* ont une unité ω qui meſure une grandeur que nous appellerons *R*, il s'enſuit que *DCB* &c. *MLK* &c. *R* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *d c b m l k r* qui ont une même unité ſont tels que *d* meſure *D*, que *c* meſure *C* &c. Si ω meſure *D*, *r* meſure *D* par le ſecond Corôllaire du Lemme & ſi ω meſure une partie de *D*, *r* meſure cette partie de *D* par le cinquieme Corollaire du Lemme. Ainſi dans l'un & l'autre cas *r* eſt l'unité d'un nombre δ qui meſure *D* & par la même raiſon *r* eſt l'unité d'un nombre μ qui meſure *M*.

d etant l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *d*, il s'enſuit *par Theor. 88. Cor. 2.* qu'un nombre γ dont *d* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *r* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui *par Theor. 88.* eſt ſemblable à δ. δ eſt donc *par Theor. 89.* une unité de *C* & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par γ & qui *par Theor. 68.* eſt une unité de *C*. Il paroit donc *par Theor. 91.* qu'un nombre Ξ dont l'unité ξ eſt *r* priſe un nombre de fois eſt tel que ξ eſt ſemblable à γ & à *r*, que Ξ eſt ſem-

ſemblable à δ & que Ξ eſt l'unité d'un nombr qui meſure C & qui eſt ſemblable à δ. La grandeu meſurée par ξ eſt meſurée par un nombre q qu a l'unité de r & ξ etant *par Theor.* 72. un unité de C, q eſt *par Theor.* 87. l'unité d'u nombre σ qui meſure C. Par la même raiſon n etant l'unité d'un nombre qui meſure L & qui eſt ſemblable à m, un nombre λ dont m eſt l'unité & qui eſt ſemblable à r eſt l'unité d'un nombre qui meſure L & qui eſt ſemblable à μ. μ eſt donc une unité de L & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par λ & qui eſt une unité de L. Il paroit donc qu'un nombre Θ dont ξ eſt l'unité & qui eſt ſemblable à μ eſt l'unité d'un nombre qui meſure L & qui eſt ſemblable à μ. ξ etant une unité de L, q eſt l'unité d'un nombre τ qui meſure L.

c etant l'unité d'un nombre qui meſure B & qui eſt ſemblable à d, il s'enſuit *par Theor.* 88. *Cor.* 2. qu'un nombre β dont c eſt l'unité & qui eſt ſemblable à r eſt l'unité d'un nombre qui meſure B & qui *par Theor.* 88. eſt ſemblable à δ. σ eſt donc *par Theor.* 89. une unité de B & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par β & qui *par Theor.* 68. eſt une unité de B. Il paroit donc *par Theor.* 91. qu'un nombre Π dont l'unité π eſt q priſe un nombre de fois eſt tel que π eſt ſemblable à β & à r, que Π eſt ſemblable à σ & que Π eſt l'unité d'un nombre qui meſure B & qui eſt ſemblable à δ. La grandeur meſurée par π eſt meſurée par un

nombre

nombre p qui a l'unité de r & π etant *par Theor.* 72. une unité de B, p eſt *par Theor.* 87. l'unité d'un nombre ϕ qui meſure B. Par la même raiſon l etant l'unité d'un nombre qui meſure K & qui eſt ſemblable à m, un nombre κ dont l eſt l'unité & qui eſt ſemblable à r eſt l'unité d'un nombre qui meſure K & qui eſt ſemblable à μ. τ eſt donc une unité de K & l'unité d'un nombre qui meſure la grandeur meſurée par κ & qui eſt une unité de K. Il paroit donc qu'un nombre X dont π eſt l'unité & qui eſt ſemblable à τ eſt l'unité d'un nombre qui meſure K & qui eſt ſemblable à μ. π etant une unité de K, p eſt l'unité d'un nombre ψ qui meſure K.

COROLLAIRE.

C etant meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à δ & dont l'unité Ξ eſt ſemblable à δ, le nombre σ qui meſure C & dont q eſt l'unité, eſt la ſeconde puiſſance d'un nombre dont q eſt l'unité & qui eſt ſemblable à δ & L etant meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à μ & dont l'unité Θ eſt ſemblable à μ, le nombre τ qui meſure L & dont q eſt l'unité, eſt la ſeconde puiſſance d'un nombre dont q eſt l'unité & qui eſt ſemblable à μ. B etant meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à δ & dont l'unité Π eſt ſemblable à σ, le nombre ϕ qui meſure B & dont p eſt l'unité, eſt la troiſieme puiſſance d'un nombre dont p eſt l'unité & qui eſt ſemblable à δ & K etant meſurée par un nombre qui eſt ſemblable

blable à μ & dont l'unité X eſt ſemblable à τ, le nombre ⊥ qui meſure *K* & dont *p* eſt l'unité, eſt la troiſieme puiſſance d'un nombre dont *p* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à μ. Si deux grandeurs qui ont une même unité ſont les racines de deux ſecondes, troiſiemes, quatriemes puiſſances & ainſi de ſuite, les ſecondes puiſſances ſont meſurées par deux ſecondes puiſſances numeriques qui ont la même unité, les troiſiemes puiſſances ſont meſurées par deux troiſiemes puiſſances numeriques qui ont la même unité & ainſi de ſuite.

THEOREME CLVIII.

Une grandeur etant à une autre ce que celle ci eſt à une troiſieme grandeur, ce que la troiſieme eſt à une quatrieme & ainſi de ſuite : ſi la premiere & la troiſieme ont une même unité, les ſecondes puiſſances des trois premieres grandeurs ont une même unité ; ſi la premiere & la quatrieme ont une même unité, les troiſiemes puiſſances des quatre premieres grandeurs ont une même unité & ainſi de ſuite. Soient les grandeurs *EDC* &c. *KIH* &c. *ONM* &c. *RQP* &c. telles que *D* ſoit la ſeconde puiſſance de *E*, *C* la troiſieme puiſſance de *E* &c. que *I* ſoit la ſeconde puiſſance de *K*, *H* la troiſieme puiſſance de *K* &c. que *N* ſoit la ſeconde puiſſance de *O*, *M* la troiſieme puiſſance de *O* &c. que *Q* ſoit la ſeconde puiſſance de *R*, *P* la troiſieme puiſſance de *R* &c. & que *E* ſoit à *K* ce que *K* eſt à *O*, ce que *O* eſt à *R* &c. Si *E* & *O*

& *O* ont une même unité, *DIN* ont une même unité. Si *E* & *R* ont une même unité, *CHMP* ont une même unité &c.

Les grandeurs *EDC* &c. *KIH* &c. *ONM* &c. *RQP* &c. etant telles que *D* est la seconde, *C* la troisieme puissance de *E* &c. que *I* est la seconde, *H* la troisieme puissance de *K* &c. que *N* est la seconde, *M* la troisieme puissance de *O* &c. que *Q* est la seconde, *P* la troisieme puissance de *R* &c. & que *E* est à *K* ce que *K* est à *O*, ce que *O* est à *R* &c. il s'ensuit *par Theor. 150.* que des grandeurs *VTS* &c. *ZYX* &c. sont telles que *T* est la seconde puissance de *V*, *S* la troisieme puissance de *V* &c. que *Y* est la seconde puissance de *Z*, *X* la troisieme puissance de *Z* &c. que *E* est à *K* ce que *V* est à *Z*, que *E* est à *O* ce que *T* est à *Y*, que *E* est à *R* ce que *S* est à *X* &c. Or *D* est à *I* ce que *T* est à *Y par Theor. 154. Cor. 1.* Donc *E* est à *O* ce que *D* est à *I*.

Supposé donc que *E* & *O* ayent une même unité, *D* & *I* ont une même unité *par Theor. 131.* Or *E* etant à *K* ce que *K* est à *O*, *D* est à *I* ce que *I* est à *N*. *I* & *N* ont donc aussi une même unité, d'où il suit *par Theor. 107.* que *DIN* ont une même unité.

Il paroit encore *par Theor. 154. Cor. 1.* que *C* est à *H* ce que *S* est à *X*, ce que *E* est à *R*.

Supposé donc que *E* & *R* ayent une même unité, *C* & *H* ont une même unité *par Theor.*
 131.

131. Or *E* etant à *K* ce que *K* eſt à *O*, ce que *O* eſt à *R*, *C* eſt à *H* ce que *H* eſt à *M*, ce que *M* eſt à *P*. *H* & *M* ont donc auſſi une même unité & *M* & *P* ont auſſi une même unité, d'où il ſuit *par Theor. 107.* que *C H M P* ont une même unité.

COROLLAIRE.

On voit auſſi que ſi *D I* ont une même unité, *E O* ont une même unité, que ſi *C H* ont une même unité, *E R* ont une même unité. Une grandeur etant à une autre ce que celle ci eſt à une troiſieme grandeur, ce que la troiſieme eſt à une quatrieme & ainſi de ſuite : ſi les ſecondes puiſſances des deux premieres grandeurs ont une même unité, la premiere & la troiſieme grandeur ont une même unité; ſi les troiſiemes puiſſances des deux premieres grandeurs ont une même unité, la premiere & la quatrieme grandeur ont une même unité & ainſi de ſuite.

SCHOLIE.

Si le côté d'un Triangle rectangle eſt egal à la baſe, le quarré du côté eſt la moitié du quarré de l'hypothenuſe & comme 1 & 2 ſont des nombres premiers entre eux & que 2 n'eſt pas un nombre quarré, il paroit *par Theor. 152. Cor.* que le quarré du côté & le quarré de l'hypothenuſe ne ſont pas meſurés par de ſecondes puiſſances numeriques qui ayent la même unité, d'où il ſuit *par Theor. 157. Cor.* que le côté *A* & l'hypothenuſe *C* n'ont pas une même unité. Or la

Geome-

Geometrie enſeigne à trouver entre *A* & *C* une moyenne proportionnelle *B*. *A* etant donc à *B* ce que *B* eſt à *C*, le Corollaire precedent fait voir que le quarré de *A* & le quarré de *B* n'ont pas une même unité. Suppoſé donc que l'on eleve ſur les quarrés de *A* & de *B* deux priſmes qui ayent la même hauteur. Ces deux priſmes ſeront entre eux comme leurs baſes. Donc *par Theor. 131.* ces deux priſmes n'ont point d'unité qui leur ſoit commune, d'où il ſuit *par Theor. 65 & 66.* que ces priſmes ont des parties & que chacune de leurs parties en a d'autres.

THEOREME CLIX.

Une grandeur etant à une autre ce que celle ci eſt à une troiſieme grandeur, ce que la troiſieme eſt à une quatrieme & ainſi de ſuite: ſi la premiere eſt à la troiſieme ce que ſont entre elles les ſecondes puiſſances de deux grandeurs qui ont une même unité, les trois premieres grandeurs ont une même unité; ſi la premiere eſt à la quatrieme ce que ſont entre elles les troiſiemes puiſſances de deux grandeurs qui ont une même unité, les quatre premieres grandeurs ont une même unité & ainſi de ſuite. Soient *E F G H* &c. des grandeurs telles que *E* ſoit à *F* ce que *F* eſt à *G*, ce que *G* eſt à *H* &c. Soient les grandeurs *L K I* &c. *Q P O* &c. telles que *K* ſoit la ſeconde puiſſance de *L*, *I* la troiſieme puiſſance de *L* &c. que *P* ſoit la ſeconde puiſſance de *Q*, *O* la troiſieme puiſſance de *Q* &c. & que *L Q* ayent une mê-

me unité. Si *E* est à *G* ce que *K* est à *P*, *EFG* ont une même unité. Si *E* est à *H* ce que *I* est à *O*, *EFGH* ont une même unité &c.

Les grandeurs *EFGH* &c. etant telles que *E* est à *F* ce que *F* est à *G*, ce que *G* est à *H* &c. il s'ensuit *par Theor. 150.* que des grandeurs *VTS* &c. *ZYX* &c. sont telles que *T* est la seconde puissance de *V*, *S* la troisieme puissance de *V* &c. que *Y* est la seconde puissance de *Z*, *X* la troisieme puissance de *Z* &c. que *E* est à *F* ce que *V* est à *Z*, que *E* est à *G* ce que *T* est à *Y*, que *E* est à *H* ce que *S* est à *X* &c.

Puisque les grandeurs *LKI* &c. *QPO* &c. sont telles que *K* est la seconde, *I* la troisieme puissance de *L* &c. que *P* est la seconde, *O* la troisieme puissance de *Q* &c.

Supposé donc que *E* soit à *G* ce que *K* est à *P*, il s'ensuit que *K* est à *P* ce que *T* est à *Y*. Donc *par Theor. 154.* *L* est à *Q* ce que *V* est à *Z*, ce que *E* est à *F*, ce que *F* est à *G*. Or *L* & *Q* ayant une même unité, *E* & *F* ont une même unité *par Theor. 131.* & *F* & *G* ont aussi une même unité, d'où il suit *par Theor. 107.* que *EFG* ont une même unité.

Supposé que *E* soit à *H* ce que *I* est à *O*, il s'ensuit que *I* est à *O* ce que *S* est à *X*. Donc *par Theor. 154.* *L* est à *Q* ce que *V* est à *Z*, ce que *E* est à *F*, ce que *F* est à *G*, ce que *G* est à *H* & puisque *L* & *Q* ont une même unité, *EFGH* ont une même unité.

THEO-

THEOREME CLX.

Une grandeur etant à une autre ce que celle ci eſt à une troiſieme grandeur, ce que la troiſieme eſt à une quatrieme & ainſi de ſuite : ſi la premiere & la troiſieme ſont de ſecondes puiſſances, la ſeconde grandeur eſt le produit de la racine de la premiere grandeur, multipliée par la racine de la troiſieme grandeur ; ſi la premiere & la quatrieme grandeur ſont de troiſiemes puiſſances, la ſeconde grandeur eſt le produit de la ſeconde puiſſance de la racine de la premiere grandeur, multipliée par la racine de la quatrieme grandeur & la troiſieme grandeur eſt le produit de la racine de la premiere grandeur, multipliée par la ſeconde puiſſance de la racine de la quatrieme grandeur ; ſi la premiere & la cinquieme grandeur ſont de quatriemes puiſſances, la ſeconde grandeur eſt le produit de la troiſieme puiſſance de la racine de la premiere grandeur, multipliée par la racine de la cinquieme grandeur, la troiſieme grandeur eſt le produit de la ſeconde puiſſance de la racine de la premiere grandeur, multipliée par la ſeconde puiſſance de la racine de la cinquieme grandeur & la quatrieme grandeur eſt le produit de la racine de la premiere grandeur multipliée par la troiſieme puiſſance de la racine de la cinquieme grandeur & ainſi de ſuite. Soient les grandeurs $ABCDE$ &c. telles que A ſoit à B ce que B eſt à C, ce que C eſt à D, ce que D eſt à E &c. Soient les grandeurs HGF &c. ONM &c. telles que G

ſoit la ſeconde puiſſance de *H*, *F* la troiſieme puiſſance de *H* &c. que *N* ſoit la ſeconde puiſſance de *O*, *M* la troiſieme puiſſance de *O* &c. Si *A* eſt la ſeconde puiſſance de *H* & que *C* ſoit la ſeconde puiſſance de *O*, *B* eſt à *H* ce que *O* eſt à l'element de *B*. Si *A* eſt la troiſieme puiſſance de *H* & que *D* ſoit la troiſieme puiſſance de *O*, *B* eſt à *G* ce que *O* eſt à l'element de *B* & *C* eſt à *H* ce que *N* eſt à l'element de *C*. Si *A* eſt la quatrieme puiſſance de *H* & que *E* ſoit la quatrieme puiſſance de *O*, *B* eſt à *F* ce que *O* eſt à l'element de *B*, *C* eſt à *G* ce que *N* eſt à l'element de *C* & *D* eſt à *H* ce que *M* eſt à l'element de *D* &c.

Les grandeurs *A B C D E* &c. *H G F* &c. *O N M* &c. etant telles que *A* eſt à *B* ce que *B* eſt à *C*, ce que *C* eſt à *D*, ce que *D* eſt à *E* &c. que *G* eſt la ſeconde, *F* la troiſieme puiſſance de *H* &c. que *N* eſt la ſeconde, *M* la troiſieme puiſſance de *O* &c. que *H* eſt la racine de *A* & que *O* eſt la racine de quelqu'une des grandeurs *C D E* &c. il eſt evident que *A B C D E* &c. *H G F* &c. *O N M* &c. ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *a b c d e h g f o n m* qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B* &c.

Suppoſé que *A* ſoit la ſeconde puiſſance de *H* & que *C* ſoit la ſeconde puiſſance de *O*. Deux racines dont l'une eſt à l'autre ce que *A* eſt à *B* ſont telles que la ſeconde puiſſance de la premiere eſt à la ſeconde puiſſance de la ſeconde

ce

ce que *A* eſt à *C par Theor. 150.* Donc *par Theor. 154 & 136. A* eſt à *B* ce que *H* eſt à *O*. *a* eſt donc à *b* ce que *h* eſt à *o*. Mais *h* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *h*. Donc *par Theor. 117. o* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *h*. L'unité de *o* eſt donc à *o* ce que *h* eſt à *b par Theor. 108.* & par conſequent *B* eſt à *H* ce que *O* eſt à l'element de *B*.

Suppoſé que *A* ſoit la troiſieme puiſſance de *H* & que *D* ſoit la troiſieme puiſſance de *O*. Deux racines dont l'une eſt à l'autre ce que *A* eſt à *B*, ſont telles que la troiſieme puiſſance de la premiere eſt à la troiſieme puiſſance de la ſeconde ce que *A* eſt à *D par Theor. 150.* Donc *par Theor. 154 & 136. A* eſt à *B* ce que *H* eſt à *O*. *a* eſt donc à *b* ce que *h* eſt à *o*. Mais *g* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *h* & *par Theor. 85. h* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *g*. Donc *par Theor. 117. o* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *g*. L'unité de *o* eſt donc à *o* ce que *g* eſt à *b par Theor. 108.* & par conſequent *B* eſt à *G* ce que *O* eſt à l'element de *B*.

a etant à *b* ce que *b* eſt à *c*, il s'enſuit que *b* eſt à *c* ce que *h* eſt à *o*. Or *o* etant l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *g*, *g* eſt *par Theor. 85.* l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *o* & *h* etant l'unité d'un nombre qui meſure *G* &

qui eſt ſemblable à *b*, il paroit *par Theor. 89* & *72.* que *b* eſt l'unité d'un nombre β qui meſure *B*. Donc *par Theor. 117.* *o* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à β, d'où il ſuit *par Theor. 88. Cor. 2* & *88.* que *C* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *o* & dont l'unité qui eſt *o* priſe un nombre de fois, eſt ſemblable à *b*. Donc *par Theor. 85.* *C* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *b* & dont l'unité qui eſt *o* priſe un nombre de fois, eſt ſemblable à *o*. *C* eſt donc meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *b* & dont *n* eſt l'unité *par Theor. 87.* L'unité de *n* eſt donc à *n* ce que *b* eſt à *c* *par Theor. 108.* & par conſequent *C* eſt à *H* ce que *N* eſt à l'element de *C*.

Suppoſé que *A* ſoit la quatrieme puiſſance de *H* & que *E* ſoit la quatrieme puiſſance de *O*. Il paroit *par Theor. 150. 154* & *136.* que *A* eſt à *B* ce que *H* eſt à *O*. *a* eſt donc à *b* ce que *b* eſt à *o*. Mais *f* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *b*, d'où il ſuit *par Theor. 85.* que *b* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *f*. Donc *par Theor. 117.* *o* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *f*. L'unité de *o* eſt donc à *o* ce que *f* eſt à *b* *par Theor. 108.* & par conſequent *B* eſt à *F* ce que *O* eſt à l'element de *B*.

b eſt à *c* ce que *b* eſt à *o*. Or *o* etant l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *f*, *f* eſt *par Theor. 85.* l'unité d'un nombre

nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *o* & *g* etant l'unité d'un nombre qui meſure *F* & qui eſt ſemblable à *h*, d'où il ſuit que *h* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *F* & qui eſt ſemblable à *g*, il paroit *par Theor. 89 & 72.* que *h* eſt l'unité d'un nombre π qui meſure *B.* Donc *par Theor. 117.* *o* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à π, d'où il ſuit *par Theor. 88. Cor. 2 & 88.* que *C* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *o* & dont l'unité qui eſt *o* priſe un nombre de fois eſt ſemblable à *g*. Donc *par Theor. 85.* *C* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *g* & dont l'unité qui eſt *o* priſe un nombre de fois, eſt ſemblable à *o*. *C* eſt donc meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *g* & dont *n* eſt l'unité *par Theor. 87.* L'unité de *n* eſt donc à *n* ce que *g* eſt à *c* *par Theor. 108.* & par conſequent *C* eſt à *G* ce que *N* eſt à l'element de *C*.

b etant à *c* ce que *c* eſt à *d*, *c* eſt à *d* ce que *h* eſt à *o*. Or *n* etant l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *g*, *g* eſt *par Theor. 85.* l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *n* & *h* etant l'unité d'un nombre qui meſure *G* & qui eſt ſemblable à *h*, il paroit *par Theor. 89 & 72.* que *h* eſt l'unité d'un nombre γ qui meſure *C*. Donc *par Theor. 117.* *o* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à γ, d'où il ſuit *par Theor. 88. Cor. 2 & 88.* que *D* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *n* & dont l'unité qui eſt *o* priſe un nombre de fois, eſt ſemblable à *h*. Donc *par Theor. 85.*

D eſt

D eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *b* & dont l'unité qui eſt *o* priſe un nombre de fois, eſt ſemblable à *n*. *D* eſt donc meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *b* & dont *m* eſt l'unité *par Theor. 87.* L'unité de *m* eſt donc à *m* ce que *b* eſt à *d par Theor. 108.* & par conſequent *D* eſt à *H* ce que *M* eſt à l'element de *D*.

THEOREME CLXI.

Si deux grandeurs inegales ſont les racines de deux puiſſances ſecondes, troiſiemes, quatriemes & ainſi de ſuite, l'une des ſecondes puiſſances eſt à une grandeur ce que celle ci eſt à l'autre ſeconde puiſſance, l'une des troiſiemes puiſſances eſt à une grandeur ce que celleci eſt à une ſeconde grandeur, ce que la ſeconde eſt à l'autre troiſieme puiſſance, l'une des quatriemes puiſſances eſt à une grandeur ce que celleci eſt à une ſeconde grandeur, ce que la ſeconde eſt à une troiſieme grandeur, ce que la troiſieme eſt à l'autre quatrieme puiſſance & ainſi de ſuite. Soient *EDCB* &c. *VTSR* &c. des grandeurs telles que *D* ſoit la ſeconde puiſſance de *E*, *C* la troiſieme puiſſance de *E*, *B* la quatrieme puiſſance de *E* &c. que *T* ſoit la ſeconde puiſſance de *V*, *S* la troiſieme puiſſance de *V*, *R* la quatrieme puiſſance de *V* &c. Si *E* eſt plus grande que *V*, *D* eſt à une grandeur *M* ce que *M* eſt à *T*, *C* eſt à une grandeur *K* ce que *K* eſt à une grandeur *L*, ce que *L* eſt à *S*, *B* eſt à une grandeur *G* ce que *G* eſt à une gran-

grandeur *H*, ce que *H* eſt à une grandeur *I*, ce que *I* eſt à *R* &c.

Les grandeurs *EDCB* &c. *VTSR* &c. etant telles que *D* eſt la ſeconde, *C* la troiſieme, *B* la quatrieme puiſſance de *E* &c. que *T* eſt la ſeconde, *S* la troiſieme, *R* la quatrieme puiſſance de *V* &c. & que *E* eſt plus grande que *V*, il s'enſuit que *EDCB* &c. *VTSR* &c. ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *edcbutſr* qui ont la même unité, ſont tels que *e* meſure *E*, que *d* meſure *D* &c.

Puisque *E* eſt plus grande que *V*, il paroit par le cinquieme & le ſecond Corollaire du Lemme que *u* meſure une partie de *E*. Or *e* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *D* & qui eſt ſemblable à *e*. Donc *par Theor. 82.* *M* partie de *D* eſt meſurée par un nombre dont *e* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *u*. *M* eſt donc meſurée par un nombre *m* qui a l'unité de *e*. *d* eſt à *m* ce que *e* eſt à *u* *par Theor. 115.* & puisque *u* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *T* & qui eſt ſemblable à *u*, il s'enſuit *par Theor. 116.* que *m* eſt à *t* ce que *e* eſt à *u*. *d* eſt donc à *m* ce que *m* eſt à *t* & par conſequent *D* eſt à *M* ce que *M* eſt à *T*.

Puisque *u* meſure une partie de *E* & que *d* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *e*, *K* partie de *C* eſt meſurée par un nombre dont *d* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *u* *par Theor. 82.* *K* eſt meſurée par un nombre

nombre *k* qui a l'unité de *e*. *c* eſt à *k* ce que *e* eſt à *u* *par Theor. 115.*

e eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *d* *par Theor. 85.* Or *V* etant moindre que *E*, *T* eſt moindre que *D* *par Theor. 153.* & puiſque *t* meſure une partie de *D*, *L* partie de *C* eſt meſurée par un nombre dont *e* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *t* *par Theor. 82.* *L* eſt meſurée par un nombre *l* qui a l'unité de *e*. Or *m* eſt à *k* ce que *e* eſt à *d* *par Theor. 116.* d'où il ſuit *par Theor. 117.* que *K* eſt meſurée par un nombre dont *m* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *e*. *L* eſt auſſi meſurée par un nombre dont *t* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *e*. Donc *par Theor. 116.* *c* eſt à *k* ce que *d* eſt à *m* & *k* eſt à *l* ce que *m* eſt à *t*. Or nous avons vû que *d* eſt à *m* ce que *m* eſt à *t*. *c* eſt donc à *k* ce que *k* eſt à *l*. *S* eſt meſurée par un nombre dont *t* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *u*. *l* eſt donc à *ſ* ce que *e* eſt à *u* *par Theor. 115.* ce que *c* eſt à *k*. Donc *c* eſt à *k* ce que *k* eſt à *l*, ce que *l* eſt à *ſ* & par conſequent *C* eſt à *K* ce que *K* eſt à *L*, ce que *L* eſt à *S*.

Puiſque *u* meſure une partie de *E* & que *c* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *e*, *G* partie de *B* eſt meſurée par un nombre dont *c* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *u* *par Theor. 82.* *G* eſt meſurée par un nombre *g* qui a l'unité de *e*. *b* eſt à *g* ce que *e* eſt à *u* *par Theor. 115.*

c etant

c etant l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *e* & *d* etant l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *e*, *d* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *d par Theor. 86.* Or *T* eſt moindre que *D* & puiſque *t* meſure une partie de *D*, *H* partie de *B* eſt meſurée par un nombre dont *d* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *t par Theor. 82.* *H* eſt meſurée par un nombre *b* qui a l'unité de *e*. *b* eſt donc à *b* ce que *d* eſt à *t par Theor. 115.*

e eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *c par Theor. 85.* Mais *V* etant moindre que *E*, *S* eſt moindre que *C par Theor. 153.* & puiſque *ſ* meſure une partie de *C*, *I* partie de *B* eſt meſurée par un nombre dont *e* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *ſ par Theor. 82.* *I* eſt meſurée par un nombre *i* qui a l'unité de *e*. Or *par Theor. 116.* *k* eſt à *g* ce que *d* eſt à *c* & *l* eſt à *h* ce que *e* eſt à *d*, d'où il ſuit *par Theor. 117.* que *G* eſt meſurée par un nombre dont *k* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *e* & que *H* eſt meſurée par un nombre dont *l* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *e*. *I* eſt auſſi meſurée par un nombre dont *ſ* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *e*. Donc *par Theor. 116.* *b* eſt à *g* ce que *c* eſt à *k*, *g* eſt à *h* ce que *k* eſt à *l* & *h* eſt à *i* ce que *l* eſt à *ſ*. Or nous avons vû que *c* eſt à *k* ce que *k* eſt à *l*, ce que *l* eſt à *ſ*. *b* eſt donc à *g* ce que *g* eſt à *h* ce que *h* eſt à *i*. *R* eſt meſurée par un nombre dont *ſ* eſt l'unité & qui

& qui eſt ſemblable à *u*. *i* eſt donc à *r* ce que *e* eſt à *u par Theor. 115.* ce que *b* eſt à *g*. Donc *b* eſt à *g* ce que *g* eſt à *b*, ce que *b* eſt à *i*, ce que *i* eſt à *r* & par conſequent *B* eſt à *G* ce que *G* eſt à *H*, ce que *H* eſt à *I*, ce que *I* eſt à *R*.

THEOREME CLXII.

Deux racines etant inegales : ſi les ſecondes puiſſances ſont multipliées par une même multipliante, l'un des produits eſt à une grandeur ce que celle ci eſt à l'autre produit ; ſi les troiſiemes puiſſances ſont multipliées par une même multipliante, l'un des produits eſt à une grandeur ce que celle ci eſt à une ſeconde grandeur, ce que la ſeconde eſt à l'autre produit & ainſi de ſuite. Soient les grandeurs *E D C* &c. *V T S* &c. telles que *D* ſoit la ſeconde puiſſance de *E*, *C* la troiſieme puiſſance de *E* &c. que *T* ſoit la ſeconde puiſſance de *V*, *S* la troiſieme puiſſance de *V* &c. & que *E* ſoit plus grande que *V*. Soient *A Q X* des grandeurs. Si *A* eſt à *D* ce que *X* eſt à l'element de *A* & que *Q* ſoit à *T* ce que *X* eſt à l'element de *Q*, *A* eſt à une grandeur *G* ce que *G* eſt à *Q*. Si *A* eſt à *C* ce que *X* eſt à l'element de *A* & que *Q* ſoit à *S* ce que *X* eſt à l'element de *Q*, *A* eſt à une grandeur *K* ce que *K* eſt à une grandeur *N*, ce que *N* eſt à *Q* &c.

Les

Les grandeurs *EDC* &c. *VTS* &c. etant telles que *D* eſt la ſeconde, *C* la troiſieme puiſſance de *E* &c. que *T* eſt la ſeconde, *S* la troiſieme puiſſance de *V* &c. que *E* eſt plus grande que *V*, que la grandeur *A* eſt à l'une des grandeurs *DC* &c. ce que la grandeur *X* eſt à l'element de *A*, & que la grandeur *Q* eſt à l'une des grandeurs *TS* &c. ce que *X* eſt à l'element de *Q*, il s'enſuit que *EDC* &c. *A*, *VTS* &c. *Q*, *X* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *e d c a u t ſ q x* qui ont la même unité ſont tels que *e* meſure *E*, que *d* meſure *D* &c.

Suppoſé que *A* ſoit à *D* ce que *X* eſt à l'element de *A* & que *Q* ſoit à *T* ce que *X* eſt à l'element de *Q*. Par le Theoreme precedent *D* eſt à une grandeur *H* ce que *H* eſt à *T*. Deux racines dont l'une eſt à l'autre ce que *D* eſt à *H* ſont donc telles que la ſeconde puiſſance de celle là eſt à la ſeconde puiſſance de celle ci, ce que *D* eſt à *T* *par Theor. 150.* *D* eſt donc à *H* ce que *E* eſt à *V* *par Theor. 154 & 136.* & par conſequent, puisque *E* eſt plus grande que *V*, *D* eſt plus grande que *H* *par Theor. 144.* *H* etant donc egale à *I* partie de *D*, il s'enſuit *par Theor. 130. Cor. 1.* que *D* eſt à *I* ce que *I* eſt à *T*.

Par le cinquieme Corollaire du Lemme *I* eſt meſurée par un nombre *i* qui a l'unité de *a*. *d* eſt à *i* ce que *i* eſt à *t*. *d* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *x* & *par Theor. 85.* *A* eſt meſurée par un nombre

α dont x eſt l'unité & qui eſt ſemblable à d. Donc *par Theor. 82.* G partie de A eſt meſurée par un nombre γ dont x eſt l'unité & qui eſt ſemblable à i. G eſt meſurée par un nombre g qui a l'unité de a. t eſt auſſi l'unité d'un nombre qui meſure Q & qui eſt ſemblable à x & par conſequent Q eſt meſurée par un nombre χ dont x eſt l'unité & qui eſt ſemblable à t. α eſt donc à γ ce que γ eſt à χ. Donc *par Theor. 115.* a eſt à g ce que g eſt à q & par conſequent A eſt à G ce que G eſt à Q.

Suppoſé que A ſoit à C ce que X eſt à l'element de A & que Q ſoit à S ce que X eſt à l'element de Q. Par le Theoreme precedent C eſt à une grandeur L ce que L eſt à une grandeur O, ce que O eſt à S. Deux racines dont l'une eſt à l'autre ce que C eſt à L, ſont donc telles que la troiſieme puiſſance de celle là eſt à la troiſieme puiſſance de celle ci ce que C eſt à S *par Theor. 150.* C eſt donc à L ce que E eſt à V *par Theor. 154 & 136.* d'où il ſuit *par Theor. 144.* que C eſt plus grande que L & que L eſt plus grande que O. Donc *par Theor. 130. Cor. 1.* M partie de C & P partie de M ſont telles que C eſt à M ce que M eſt à P, ce que P eſt à S.

Par le cinquieme Corollaire du Lemme deux nombres $m\ p$ qui ont l'unité de a ſont tels que m meſure M & que p meſure P. c eſt à m ce que m eſt à p, ce que p eſt à $ſ$. c eſt l'unité d'un nombre qui meſure A & qui eſt ſemblable à x & *par Theor. 85.* A eſt meſurée par un

un nombre β dont x eſt l'unité & qui eſt ſemblable à c. Donc *par Theor. 82.* K partie de A eſt meſurée par un nombre λ dont x eſt l'unité & qui eſt ſemblable à m & N partie de K eſt meſurée par un nombre ξ dont x eſt l'unité & qui eſt ſemblable à p. Deux nombres $k\,n$ qui ont l'unité de a ſont tels que k meſure K & que n meſure N. $\int$ eſt auſſi l'unité d'un nombre qui meſure Q & qui eſt ſemblable à x, d'où il ſuit que Q eſt meſurée par un nombre σ dont x eſt l'unité & qui eſt ſemblable à $\int$. β eſt donc à λ ce que λ eſt à ξ, ce que ξ eſt à σ. Donc *par Theor. 115.* a eſt à k ce que k eſt à n, ce que n eſt à $\int$ & par conſequent A eſt à K ce que K eſt à N, ce que N eſt à S.

THEOREME CLXIII.

Si de pluſieurs grandeurs l'une eſt à une autre ce que celle-ci eſt à une troiſieme, ce que la troiſieme eſt à une quatrieme & ainſi de ſuite, les trois premieres grandeurs ſont les produits de trois autres grandeurs multipliées par une même multipliante & telles que la premiere & la troiſieme ſont de ſecondes puiſſances, les quatre premieres grandeurs ſont les produits de quatre autres grandeurs multipliées par une même multipliante & telles que la premiere & la quatrieme ſont de troiſiemes puiſſances & ainſi de ſuite. Soient les grandeurs $A\,B\,C\,D$ &c. telles que A ſoit à B ce que B eſt à C, ce que C eſt à D &c. Des grandeurs $F\,H\,I$ ſont telles que A eſt à F ce qu'une gran-

deur *V* eſt à l'element de *A*, que *B* eſt à *H* ce que *V* eſt à l'element de *B*, que *C* eſt à *I* ce que *V* eſt à l'element de *C* & que *F* & *I* ſont de ſecondes puiſſances. Des grandeurs *L O P Q* ſont telles que *A* eſt à *L* ce qu'une grandeur *X* eſt à l'element de *A*, que *B* eſt à *O* ce que *X* eſt à l'element de *B*, que *C* eſt à *P* ce que *X* eſt à l'element de *C*, que *D* eſt à *Q* ce que *X* eſt à l'element de *D* & que *L* & *Q* ſont de troiſiemes puiſſances &c.

Les grandeurs *ABCD* &c. etant telles que *A* eſt à *B* ce que *B* eſt à *C*, ce que *C* eſt à *D* &c. deux racines dont l'une eſt à l'autre ce que *A* eſt à *B*, ſont telles que la ſeconde puiſſance de celle là eſt à la ſeconde puiſſance de celle ci ce que *A* eſt à *C*, que la troiſieme puiſſance de celle là eſt à la troiſieme puiſſance de celle ci ce que *A* eſt à *D* &c. *par Theor.150.* Donc *par Theor.152.* des grandeurs *G F*, *K I* ſont telles que *F* eſt la ſeconde puiſſance de *G*, que *I* eſt la ſeconde puiſſance de *K*, que *A* eſt à *F* ce qu'une grandeur *V* eſt à l'element de *A* & que *C* eſt à *I* ce que *V* eſt à l'element de *C*, & des grandeurs *NML*, *SRQ* ſont telles que *M* eſt la ſeconde, *L* la troiſieme puiſſance de *N*, que *R* eſt la ſeconde, *Q* la troiſieme puiſſance de *S*, que *A* eſt à *L* ce qu'une grandeur *X* eſt à l'element de *A* & que *D* eſt à *Q* ce que *X* eſt à l'element de *D* &c. Les grandeurs *ABCD*, *GF*, *KI*, *V*, *NML*, *SRQ*, *X* ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *abcdgfkiunmlſrqx* qui

qui ont la même unité ſont tels que *a* meſure *A*, que *b* meſure *B* &c.

Par Theor. 136 & 133. *A* eſt à *C* ce que *F* eſt à *I* d'où il ſuit *par Theor. 154.* que *A* eſt à *B* ce que *G* eſt à *K*. *f* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *u* & *g* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *F* & qui eſt ſemblable à *g*. *g* eſt donc l'unité d'un nombre *α* qui meſure *A*. *a* etant à *b* ce que *g* eſt à *k*, *k* eſt donc l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *α* *par Theor. 117.* Il paroit donc *par Theor. 88. Cor. 2 & 88.* que *B* eſt meſurée par un nombre dont l'unité *β* eſt *k* priſe un nombre de fois & qui eſt ſemblable à *u*. Soit *H* une grandeur meſurée par *β*. *H* eſt meſurée par un nombre *b* qui a l'unité de *a* & *par Theor. 87.* *b* eſt une unité de *B*. Le nombre qui a l'unité de *a* & qui meſure la grandeur meſurée par cette unité eſt donc à *b* ce que *u* eſt à *b* & par conſequent *B* eſt à *H* ce que *V* eſt à l'element de *B*.

Par Theor. 136 & 133. *A* eſt à *D* ce que *L* eſt à *Q*, d'où il ſuit *par Theor. 154.* que *A* eſt à *B* ce que *N* eſt à *S* & *par Theor. 154. Cor. 1.* que *A* eſt à *C* ce que *M* eſt à *R*. *l* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *A* & qui eſt ſemblable à *x* & *m* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *L* & qui eſt ſemblable à *n*, d'où il ſuit *par Theor. 85.* que *n* eſt l'unité d'un nombre qui meſure *L* & qui eſt ſemblable à *m*. *n* eſt donc l'unité d'un nombre *ν* qui meſure *A*. *a* etant à *b* ce que *n* eſt à *ſ*, *ſ* eſt donc l'unité d'un nombre

qui mesure *B* & qui est semblable à η *par Theor. 117.* Il paroit donc *par Theor. 88. Cor. 2 & 88.* que *B* est mesurée par un nombre dont l'unité π est f prise un nombre de fois & qui est semblable à x. Soit *O* une grandeur mesurée par π. *O* est mesurée par un nombre o qui a l'unité de a & qui *par Theor. 87.* est une unité de *B*. Le nombre qui a l'unité de a & qui est le même que cette unité est donc à o ce que x est à b & par consequent *B* est à *O* ce que *X* est à l'element de *B*.

m etant l'unité d'un nombre qui mesure *L* & qui est semblable à n & l etant l'unité d'un nombre qui mesure *A* & qui est semblable à x, m est l'unité d'un nombre v qui mesure *A*. a etant à c ce que m est à r, r est l'unité d'un nombre qui mesure *C* & qui est semblable à v *par Theor. 117.* Il paroit donc *par Theor. 88. Cor. 2 & 88.* que *C* est mesurée par un nombre dont l'unité χ est r prise un nombre de fois & qui est semblable à x. Soit *P* une grandeur mesurée par χ. *P* est mesurée par un nombre p qui a l'unité de a & qui est une unité de *C*. L'unité de a est donc à p ce que x est à $ç$ & par consequent *C* est à *P* ce que *X* est à l'element de *C*.

THEOREME CLXIV.

Si la racine est composée, une partie de la puissance est mesurée par son exposant. Soient *DCB* &c. des grandeurs telles que *C* soit la seconde

conde puiſſance de *D*, *B* la troiſieme puiſſance de *D* &c. Si *D* a des parties, une partie de *D* eſt meſurée par un nombre qui eſt l'expoſant de *D*, une partie de *C* eſt meſurée par un nombre qui eſt l'expoſant de *C*, une partie de *B* eſt meſurée par un nombre qui eſt l'expoſant de *B* &c.

Les grandeurs *DCB* &c. etant telles que *C* eſt la ſeconde, *B* la troiſieme puiſſance de *D* &c. ces grandeurs ſont egales ou inegales. Ainſi des nombres rationnels *d c b* qui ont la même unité ſont tels que *d* meſure *D*, que *c* meſure *C* &c.

Puiſque *D* a des parties, toute eſpece qui meſure une partie de *D* eſt l'unité d'un nombre qui meſure cette partie & ce nombre eſt l'expoſant de *D* parceque *D* eſt la premiere puiſſance de *D*.

d eſt l'unité d'un nombre qui meſure *C* & qui eſt ſemblable à *d* & puiſque *D* a des parties & que par le cinquieme Corollaire du Lemme toute partie de *D* eſt meſurée par un nombre qui a l'unité de *d*, il s'enſuit *par Theor. 82.* que *d* eſt l'unité d'un nombre qui meſure Γ partie de *C*. Or *D* eſt epuiſée par deux coordonnées qui etant egales ou inegales ſont voir que *D* ou une partie de *D* eſt meſurée par une unité priſe deux fois. Γ ou une partie de Γ eſt donc meſurée par une unité priſe deux fois *par Theor. 67.* Une partie de *C* eſt donc meſurée par un nombre qui eſt l'expoſant de *C*.

c etant l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *d* & *D* ayant des parties,

A est epuisée par deux coordonnées dont l'une est egale à *E* & l'autre que nous appellerons *O* est telle que *V* est à *B* ce que *O* est à la grandeur epuisée par *B C D E*.

ABCDE etant des parties coordonnées d'une grandeur, il paroit *par Theor. 28. 15 & 49.* que *A B* epuisent une grandeur & que *B C* epuisent une grandeur. *A* etant à *B* ce que *B* est à *C*, *A* est donc à *B* ce que la grandeur epuisée par *A B* est à la grandeur epuisée par *B C par Theor. 134 & 133.*

A etant à *B* ce que *C* est à *D*, la grandeur epuisée par *A B* est donc *par Theor. 136.* à la grandeur epuisée par *B C* ce que *C* est à *D*, ce que la grandeur epuisée par *A B C* est à la grandeur epuisée par *BCD.*

A etant à *B* ce que *D* est à *E*, la grandeur epuisée par *A B C* est donc à la grandeur epuisée par *BCD* ce que *D* est à *E*, ce que la grandeur epuisée par *A B C D* est à la grandeur epuisée par *BCDE.*

Or *V* etant l'une de deux coordonnées qui epuisent *A* & dont l'autre est egale à *B* & *A* etant à *B* ce que *B* est à *C*, ce que *C* est à *D*, ce que *D* est à *E*, il paroit *par Theor. 144.* que *A* est plus grande que *E* & par consequent une partie de *A* egale à *E* & une coordonnée *O* epuisent *A*. La grandeur epuisée par *A B C D* est donc egale à la grandeur epuisée par *BCDEO*, d'où il suit *par Theor. 130. Cor. 1 & 133.* que la

grandeur epuiſée par *A B C D* eſt à la grandeur epuiſée par *B C D E* ce que la grandeur epuiſée par *BCDEO* eſt à la grandeur epuiſée par *BCDE*. *A* etant donc à *B* ce que la grandeur epuiſée par *ABCD*, ce que la grandeur epuiſée par *BCDEO* eſt à la grandeur epuiſée par *BCDE*, il s'enſuit *par Theor. 135.* que *V* eſt à *B* ce que *O* eſt à la grandeur epuiſée par *B C D E*.

COROLLAIRE I.

Soient les grandeurs *A B C D E* &c. telles que *AB* ſoient des coordonnées qui epuiſent une grandeur, que *ABC* ſoient des coordonnées qui epuiſent une grandeur, que *A B C D* ſoient des coordonnées qui epuiſent une grandeur, &c. La grandeur epuiſée par *A B* eſt partie de la grandeur epuiſée par *A B C* & celle-ci eſt partie de la grandeur epuiſée par *A B C D*, &c. Ainſi par un raiſonnement ſemblable à celui du Lemme nous ſuppoſerons que les grandeurs *BCDE* &c. ſoient parties d'une grandeur Ω & qu'aucune grandeur moindre que Ω ne ſoit telle que chacune des grandeurs *B C D E* &c. ſoit partie de cette grandeur. Ω eſt une grandeur indefinie. La grandeur *indefinie* eſt une grandeur dont pluſieurs coordonnées ne compoſent aucune grandeur moindre que celle là & ſont telles que toutes celles que l'on exprime epuiſent un Tout qui eſt partie de cette grandeur.

Si *A*, etant plus grande que *B*, eſt à *B* ce que *B* eſt à *C*, ce que *C* eſt à *D*, ce que *D* eſt

eſt à *E*, &c. *Q* eſt l'une de deux coordonnées qui epuiſent *A* & dont l'autre eſt egale à *C*, *P* eſt l'une de deux coordonnées qui epuiſent *A* & dont l'autre eſt egale à *D*. *Q* eſt moindre que *P* & *P* eſt moindre que *O*. *V* eſt donc à *B* ce qu'une grandeur egale à *A* eſt à Ω. Si de pluſieurs grandeurs, dont les deux premieres, les trois premieres & ainſi de ſuite ſont des coordonnées qui epuiſent une grandeur, la plus grande eſt à la ſeconde ce que la ſeconde eſt à la troiſieme & ainſi de ſuite, la premiere moins la ſeconde eſt à la ſeconde ce que la premiere eſt à la ſomme indefinie de toutes les autres.

COROLLAIRE II.

Suppoſé que les grandeurs *B C D E* &c. ſoient egales. Il paroit *par Theor. 59.* qu'aucune grandeur n'eſt telle que chacune des grandeurs *BCDE* &c. ſoit partie de cette grandeur. Ainſi Ω devient infinie. La grandeur *infinie* eſt une grandeur indefinie dont une partie n'eſt egale ni à des coordonnées qui epuiſent cette grandeur, ni à des coordonnées qui l'epuiſent avec une moindre coordonnée.

SCHOLIE.

Les termes d'une progreſſion indefinie, à proprement parler, n'epuiſent pas une grandeur & on ne les ſomme pas, parce qu'il les faudroit tous exprimer. Mais l'on connoit la moindre des grandeurs dont tous les termes d'une progreſſion geometrique, decroiſſante & indefinie,

nie, telle que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. ſont des parties. Il n'en eſt pas de même de la progreſſion harmonique indefinie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ &c. Car $\frac{1}{4}$ etant la moitié de $\frac{1}{2}$, la ſomme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ eſt plus grande que $\frac{1}{2}$. La ſomme $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etant par la même raiſon plus grande que $\frac{1}{3}$ & la ſomme $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ plus grande que $\frac{1}{4}$, la ſomme $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ eſt plus grande que la ſomme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, par où l'on voit que cette progreſſion comprend une infinité de ſommes coordonnées dont chacune eſt plus grande que $\frac{1}{2}$. C'eſt ce qui fait dire que la ſomme de la premiere progreſſion eſt finie & que la ſomme de la derniere eſt infinie.

THEOREME CLXVI.

Les produits de la même grandeur multipliée par la même multipliante ſont egaux. Soient *A O B* des grandeurs telles que *A* ſoit à *O* ce que *B* eſt à *R* element de *A*. Si la grandeur *E* eſt à *O* ce que *B* eſt à *S* element de *E*, *A* eſt egale à *E*.

Les grandeurs *AOB* etant telles que *A* eſt à *O* ce que *B* eſt à *R* element de *A*, *AO* ſont egales ou inegales, d'où il ſuit par le huitieme Corollaire du Lemme que *R* eſt element de *O*. La grandeur *E* etant à *O* ce que *B* eſt à *S* element de *E*, *S* eſt auſſi element de *O*. *R* eſt donc egale à *S*. Il paroit donc *par Theor. 130. Cor. 1 & 133.* que *B* eſt à *R* ce que *B* eſt à *S*, d'où il ſuit *par Theor. 136.* que *A* eſt à *O* ce que *E* eſt à *O*. Par conſequent *A* eſt à *E* ce que *O* eſt à *O*. Donc *par Theor. 132.* *A* eſt egale à *E*.

COROL-

COROLLAIRE I.

Supposé que *A* soit à *O* ce que *B* est à *R*. Si *A* est egale à *E*, *A* est à *O* ce que *E* est à *O* & par consequent *E* est à *O* ce que *B* est à *R*. Si *O* est egale à *E*, *A* est à *E* ce que *B* est à *R*. La grandeur egale au produit d'une grandeur multipliée par une certaine multipliante est un produit de cette grandeur multipliée par cette multipliante : & si deux grandeurs sont egales, le produit de l'une multipliée par une certaine multipliante est un produit de l'autre multipliée par cette multipliante.

COROLLAIRE II.

Supposé que *A* etant à *O* ce que *B* est à *R*, *A* soit à une grandeur *N* plus grande que *O* ce que *C* est à *R*. *O* est à *N* ce que *C* est à *B* *par Theor. 141.* Donc *par Theor. 144.* *B* est plus grande que *C*. Si une grandeur est le produit de deux grandeurs dont l'une soit moindre que l'autre, la multipliante de la premiere grandeur multipliée est plus grande que la multipliante de la seconde.

COROLLAIRE III.

Supposé que *A* etant à *O* ce que *B* est à *R*, *E* soit à une grandeur *P* ce que *B* est à *R*. *A* est à *O* ce que *E* est à *P*. Si donc *A* est plus grande que *E*, *O* est plus grande que *P* : & si *O* est plus grande que *P*, *A* est plus grande que *E*. De deux grandeurs multipliées par une

une même multipliante, celle qui donne le plus grand produit eſt la plus grande: & la plus grande donne le plus grand produit.

COROLLAIRE IV.

Soient *A*, *ONM* &c. *B C D* &c. des grandeurs telles que *A* ſoit à *O* ce que *B* eſt à *R* element de *A*, que *A* ſoit à *N* ce que *C* eſt à *R*, que *A* ſoit à *M* ce que *D* eſt à *R*, &c. Si *N* eſt epuiſée par les coordonnées *O n*, *M* par les coordonnées *N m*, &c. les grandeurs *ONM* &c. ſeront exprimées par les coordonnées *O n m* &c. Par le ſecond Corollaire *C* eſt moindre que *B* & *D* eſt moindre que *C*. *R* etant l'element des grandeurs *B C D* &c. eſt moindre que chacune de ces grandeurs.

Soit donc Ω la ſomme infinie des grandeurs *O n m* &c. Puiſqu'une grandeur qui eſt partie de Ω n'eſt egale ni à des coordonnées qui epuiſent Ω, ni à des coordonnées qui epuiſent Ω avec une moindre coordonnée, il eſt evident que *O* n'eſt pas egale non plus à des coordonnées qui epuiſent Ω ou la plus grande partie de Ω. *A* eſt donc à Ω ce qu'une grandeur egale à *R* eſt à *R*. Si de la ſomme infinie de pluſieurs grandeurs la premiere donne le même produit qu'une grandeur epuiſée par les deux premieres, qu'une grandeur epuiſée par les trois premieres & ainſi de ſuite, la grandeur qui eſt ce produit eſt auſſi le produit de cette ſomme multipliée par l'element de cette grandeur.

COROL-

COROLLAIRE V.

Soient *ONM* &c. *EDC* &c. des grandeurs telles que *O* ſoit à *E* ce que la grandeur *H* eſt à *R* element de *O*, que *N* ſoit à *D* ce que *H* eſt à *R*, que *M* ſoit à *C* ce que *H* eſt à *R*, &c. Si *N* eſt epuiſée par les coordonnées *On*, *M* par les coordonnées *Nm*, &c. les grandeurs *ONM* &c. ſeront exprimées par les coordonnées *O n m* &c. Par le troiſieme Corollaire *D* eſt plus grande que *E* & *C* eſt plus grande que *D*. Si donc *D* eſt epuiſée par les coordonnées *E d*, *C* par les coordonnées *D c*, &c. les grandeurs *EDC* &c. ſeront exprimées par les coordonnées *E d c* &c.

Soit donc Ω la ſomme indefinie des grandeurs *O n m* &c. Si *A* eſt la ſomme indefinie des grandeurs *E d c* &c. Ω eſt à *A* ce que *H* eſt à *R*. Si de la ſomme indefinie de pluſieurs grandeurs & de la ſomme indefinie de pluſieurs autres grandeurs, la premiere grandeur de la premiere ſomme eſt le produit de la premiere grandeur de la ſeconde ſomme, qu'un Tout epuiſé par les deux premieres grandeurs de la premiere ſomme ſoit le produit d'un Tout epuiſé par les deux premieres grandeurs de la ſeconde ſomme, qu'un Tout epuiſé par les trois premieres grandeurs de la premiere ſomme ſoit le produit d'un Tout epuiſé par les trois premieres grandeurs de la ſeconde ſomme & ainſi de ſuite & que ce ſoit la même multipliante qui donne tous ces produits, la premiere ſomme eſt le produit de la ſeconde multipliée par cette multipliante.

SCHO-

SCHOLIE.

Les abſciſſes de l'Hyperbole etant priſes ſur l'une des aſymptotes & les ordonnées etant paralleles à l'autre, ſuppoſons un parallelogramme compris ſous une abſciſſe & ſon ordonnée.

Si c'eſt l'Hyperbole ordinaire, le parallelogramme eſt le produit de toute abſciſſe multipliée par ſon ordonnée & par conſequent le produit de l'aſymptote multipliée par l'element.

Si l'Hyperbole eſt cubique, d'autres produits d'une abſciſſe multipliée par ſon ordonnée ſont moindres que le parallelogramme & tels que l'ordonnée ou l'abſciſſe qui en eſt le côté eſt moindre que l'ordonnée ou l'abſciſſe qui eſt le côté du parallelogramme. Mais il ſuffit de conſiderer ceux de ces produits dont l'ordonnée eſt moindre que celle du parallelogramme, parcequ'ils exprimeront les autres en prenant les abſciſſes ſur l'autre aſymptote. Cela etant, le parallelogramme moins le produit de toute autre abſciſſe multipliée par ſon ordonnée eſt la moitié de l'eſpace hyperbolique compris entre l'ordonnée qui eſt le côté du parallelogramme & cette autre ordonnée, & par conſequent l'eſpace hyperbolique qui n'eſt terminé par aucune autre ordonnée que celle qui eſt le côté du parallelogramme eſt double du parallelogramme.

Comme dans les Hyperboles en general le parallelogramme amoindri du produit d'une autre abſciſſe multipliée par ſon ordonnée eſt à l'eſpace hyper-

hyperbolique compris entre les deux ordonnées ce que le parallelogramme est à l'espace hyperbolique qui n'est terminé que par la plus grande de ces deux ordonnées, il s'ensuit que dans l'Hyperbole ordinaire, où la difference du parallelogramme & de cet autre produit est nulle, l'espace hyperbolique qui n'est terminé que par l'une de ces ordonnées est infini, & que dans toute hyperbole cet espace, qui est d'autant plus grand que cette ordonnée est plus grande, devient infini si l'ordonnée est infinie.

Il paroit aussi que puisque l'Hyperbole ne coupe pas son asymptote, les parties de l'hyperbole font entre elles des angles, sans quoi les parties egales de l'hyperbole traverseroient des espaces egaux, qui etant bornés par des lignes paralleles à l'asymptote, n'iroient pas jusqu'à l'asymptote, quoique leur somme fut infinie. Mettons donc à la place de l'hyperbole une ligne dont les parties ne fassent point d'angle entre elles. Cette ligne, si elle s'approche de l'asymptote, la coupera. C'est ce qui prouve le onzieme Axiome d'Euclide.

DEFINITION XIII.

Une racine etant epuisée par deux coordonnées : si trois grandeurs dont la premiere est à la seconde ce que la seconde est à la troisieme, sont telles que la premiere etant la seconde puissance de l'une de ces coordonnées de la racine & la troisieme etant la seconde puissance de l'au-

tre coordonnée de la racine, la premiere, une grandeur meſurée par (une & une) deux fois une unité qui meſure la ſeconde, & la troiſieme ſoient des coordonnées qui epuiſent la ſeconde puiſſance de la racine; ſi quatre grandeurs dont la premiere eſt à la ſeconde ce que la ſeconde eſt à la troiſieme, ce que la troiſieme eſt à la quatrieme, ſont telles que la premiere etant la troiſieme puiſſance de la premiere coordonnée de la racine & la quatrieme etant la troiſieme puiſſance de l'autre coordonnée de la racine, la premiere, une grandeur meſurée par (une & deux) trois fois une unité qui meſure la ſeconde, une grandeur meſurée par (deux & une) trois fois une unité qui meſure la troiſieme, & la quatrieme ſoient des coordonnées qui epuiſent la troiſieme puiſſance de la racine; ſi cinq grandeurs dont la premiere eſt à la ſeconde ce que la ſeconde eſt à la troiſieme, ce que la troiſieme eſt à la quatrieme, ce que la quatrieme eſt à la cinquieme, ſont telles que la premiere etant la quatrieme puiſſance de la premiere coordonnée de la racine & la cinquieme etant la quatrieme puiſſance de l'autre coordonnée de la racine, la premiere, une grandeur meſurée par (une & trois) quatre fois une unité qui meſure la ſeconde, une grandeur meſurée par (trois & trois) ſix fois une unité qui meſure la troiſieme, une grandeur meſurée par (trois & une) quatre fois une unité qui meſure la quatrieme, & la cinquieme ſoient des coordonnées qui epuiſent la quatrieme puiſſance de la racine & ainſi de ſuite, cette racine

eſt

eſt un *binome*, chacune de ces coordonnées eſt un *terme* de la puiſſance du binome & chacun de ces nombres eſt le *coefficient* du terme qu'il meſure. Soient les grandeurs *VQLE* &c. telles que *Q* ſoit la ſeconde puiſſance de *V*, *L* la troiſieme puiſſance de *V*, *E* la quatrieme puiſſance de *V* &c. Soit *V* epuiſée par les coordonnées *XY*. Toute meſure de *X* etant l'unité d'un nombre qui meſure *X* & *Y* etant auſſi meſurée par l'unité d'un nombre qui meſure *Y*, la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au premier de ces nombres & l'autre au ſecond eſt une unité priſe deux fois. Suppoſé donc que *Q* ſoit epuiſée par les coordonnées *R* Σ *T*, que *R* ſoit la ſeconde puiſſance de *X*, que Σ ſoit meſurée par deux fois une unité qui meſure une grandeur *S*, que *T* ſoit la ſeconde puiſſance de *Y* & que *R* ſoit à *S* ce que *S* eſt à *T*. *R* etant meſurée par une unité, Σ par une unité priſe deux fois & *T* par une unité, la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au premier de ces nombres & l'autre au ſecond eſt une unité priſe trois fois & la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au ſecond & l'autre au troiſieme eſt auſſi une unité priſe trois fois. Suppoſé donc que *L* ſoit epuiſée par les coordonnées *M* Ξ Π *P*, que *M* ſoit la troiſieme puiſſance de *X*, que Ξ ſoit meſurée par trois fois une unité qui meſure une grandeur *N*, que Π ſoit meſurée par trois fois une unité qui meſure une grandeur *O*, que *P* ſoit la troiſieme puiſſance de *Y* & que *M* ſoit à *N*

ce que N eſt à O, ce que O eſt à P. M etant meſurée par une unité, Ξ par une unité priſe trois fois, Π par une unité priſe trois fois & P par une unité, la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au premier de ces nombres & l'autre au ſecond eſt une unité priſe quatre fois, la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au ſecond & l'autre au troiſieme eſt une unité priſe ſix fois & la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au troiſieme & l'autre au quatrieme eſt une unité priſe quatre fois. Suppoſé donc que E ſoit epuiſée par les coordonnées $F \Delta \Theta \Lambda K$, que F ſoit la quatrieme puiſſance de X, que Δ ſoit meſurée par quatre fois une unité qui meſure une grandeur G, que Θ ſoit meſurée par ſix fois une unité qui meſure une grandeur H, que Λ ſoit meſurée par quatre fois une unité qui meſure une grandeur I, que K ſoit la quatrieme puiſſance de Y & que F ſoit à G ce que G eſt à H, ce que H eſt à I, ce que I eſt à K. &c. V eſt un binome, $X Y$ ſont les termes de V, $R \Sigma T$ les termes de Q, $M \Xi \Pi P$ les termes de L, $F \Delta \Theta \Lambda K$ les termes de E, &c. le nombre qui meſure R & dont l'unité meſure R eſt le coefficient de R, le nombre qui meſure Σ & dont l'unité meſure S eſt le coefficient de Σ.

THEOREME CLXVII.

La racine epuiſée par deux coordonnées eſt un binome. Soient les grandeurs $V N B$ &c. telles que N ſoit la ſeconde puiſſance de V, B la

la troisieme puissance de *V* &c. Si *V* est epuisée par les coordonnées *XY*, *V* est un binome.

Les grandeurs *V N B* &c. etant telles que *N* est la seconde, *B* la troisieme puissance de *V* &c. & *V* etant epuisée par les coordonnées *XY*, il paroit que *VNB* &c. *XY* & *Z* element de *V* sont egales ou inegales. Ainsi des nombres rationnels *u n b x y z* qui ont la même unité sont tels que *u* mesure *V*, que *n* mesure *N* &c.

u est l'unité d'un nombre qui mesure *N* & qui est semblable à *u*. Donc *par Theor. 82.* *O* partie de *N* est mesurée par un nombre dont *u* est l'unité & qui est semblable à *x*. *N* est epuisée par les coordonnées *O R*, d'où il suit *par Theor. 71.* que *R* est mesurée par un nombre dont *u* est l'unité & qui *par Theor. 84.* est semblable à *y*.

Or *O* etant mesurée par un nombre dont *u* est l'unité & qui est semblable à *x* & *V* etant epuisée par les coordonnées *XY*, *O* est epuisée par les coordonnées *P Q* telles que *P* est mesurée par un nombre qui est semblable à *x* & dont l'unité mesure *X* & que *Q* est mesurée par un nombre qui est semblable à *x* & dont l'unité mesure *Y par Theor. 94.* *P* etant partie de *N* est mesurée par un nombre *p* qui a l'unité de *z*, d'où il suit *par Theor. 68.* que *x* est une unité de *P*. Donc *par Theor. 108.* *z* est à *x* ce que *x* est à *p*. *P* est donc à *X* ce que *X* est à

 Z, ce

Z, ce qui fait voir que *P* eſt la ſeconde puiſſance de *X*. *Q* eſt auſſi meſurée par un nombre *q* qui a l'unité de *z*, d'où il ſuit que *y* eſt une unité de *Q*. Donc *z* eſt à *y* ce que *x* eſt à *q* & par conſequent *Q* eſt à *X* ce que *Y* eſt à *Z*.

De même *R* etant meſurée par un nombre dont *u* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *y* & *V* etant epuiſée par les coordonnées *X Y*, *R* eſt epuiſée par les coordonnées *S T* telles que *S* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *y* & dont l'unité meſure *X* & que *T* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *y* & dont l'unité meſure *Y*, d'où l'on deduira que *S* eſt à *Y* ce que *X* eſt à *Z* & que *T* eſt la ſeconde puiſſance de *Y*. *S* etant à *X* ce que *Y* eſt à *Z*, *Q* eſt à *X* ce que *S* eſt à *X*, d'où il ſuit *par Theor. 132.* que *Q* eſt egale à *S* & que *q* meſure *S*. *N* qui eſt epuiſée par *O R* & par conſequent par *P Q S T* eſt donc epuiſée par les coordonnées *P* Σ *T* telles que Σ eſt meſurée par deux fois *q*.

Si *X* eſt egale à *Y*, *P* eſt egale à *T par Theor. 153. Cor.* *P* etant à *X* ce que *X* eſt à *Z* & *Q* etant à *X* ce que *Y*, ce que *X* eſt à *Z*, *P* eſt egale à *Q*. *P* eſt donc à *Q* ce que *Q* eſt à *T par Theor. 130. Cor. 1.* Si *XY* ſont inegales *P* eſt à *Q* ce que *Q* eſt à *T par Theor. 161. 160 & 166.*

n eſt

n eſt l'unité d'un nombre qui meſure *B* & qui eſt ſemblable à *u*. Donc *par Theor. 82.* *C* partie de *B* eſt meſurée par un nombre dont *n* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *x*. *B* eſt epuiſée par les coordonnées *CH*, d'où il ſuit *par Theor. 71.* que *H* eſt meſurée par un nombre dont *n* eſt l'unité & qui *par Theor. 84.* eſt ſemblable à *y*.

Or *C* etant meſurée par un nombre dont *n* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *x* & *N* etanr epuiſée par *P* Σ *T*, *C* eſt epuiſée par les coordonnées *D E G* telles que *D* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *x* & dont l'unité meſure *P*, que *E* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *x* & dont l'unité meſure Σ & que *G* eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à *x* & dont l'unité meſure *T* *par Theor. 94.* *D* etant partie de *B* eſt meſurée par un nombre *d* qui a l'unité de z, d'où il ſuit *par Theor. 68.* que *p* eſt une unité de *D*. Donc *par Theor. 108.* z eſt à *p* ce que *x* eſt à *d* & par conſequent z eſt à *x* ce que *p* eſt à *d*, ce qui fait voir que *D* eſt la troiſieme puiſſance de *X*. *E* eſt auſſi meſurée par un nombre *e* qui a l'unité de z, d'où il ſuit *par Theor. 68.* que le nombre qui meſure Σ & qui eſt *q* priſe deux fois eſt une unité de *E*. Donc *par Theor. 85.* *E* eſt meſurée par deux fois un nombre dont *q* eſt l'unité & qui eſt ſemblable à *x*. Soit *F* une grandeur meſurée par ce nombre. *F* eſt meſurée par un nombre *f* qui a l'unité de z & puis-

que y eſt l'unité d'un nombre qui meſure Q & qui eſt ſemblable à x, il s'enſuit que y eſt l'unité d'un nombre qui meſure F & qui eſt ſemblable à p. z eſt donc à y ce que p eſt à f & par conſequent F eſt à P ce que Y eſt à Z. G eſt auſſi meſurée par un nombre g qui a l'unité de z, d'où il ſuit que t eſt une unité de G. Donc z eſt à t ce que x eſt à g & par conſequent G eſt à X ce que T eſt à Z.

De même H etant meſurée par un nombre dont n eſt l'unité & qui eſt ſemblable à y & N etant epuiſée par $P \Sigma T$, H eſt epuiſée par les coordonnées $I K M$ telles que I eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à y & dont l'unité meſure P, que K eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à y & dont l'unité meſure Σ & que M eſt meſurée par un nombre qui eſt ſemblable à y & dont l'unité meſure T, d'où l'on deduira que I eſt à Y ce que P eſt à Z, que K etant meſurée par deux fois un nombre dont q eſt l'unité & qui eſt ſemblable à y, une grandeur L meſurée par ce nombre eſt à T ce que X eſt à Z & que M eſt la troiſieme puiſſance de Y. I etant à P ce que Y eſt à Z, F eſt à P ce que I eſt à P, d'où il ſuit *par Theor. 152.* que F eſt egale à I & que f meſure I. L etant à X ce que T eſt à Z, G eſt à X ce que L eſt à X, d'où il ſuit que G eſt egale à L & que g meſure L. B qui eſt epuiſée par $C H$ & par conſequent par $D E G I K M$, eſt donc epuiſée par les coordonnées $D \Theta \Lambda M$ telles que

que Θ eſt meſurée par trois fois *f* & que Λ eſt meſurée par trois fois *g*.

Si *X* eſt egale à *Y*, *D* eſt egale à *M par Theor. 153. Cor.* *D* etant à *P* ce que *X* eſt à *Z* & *F* etant à *P* ce que *Y*, ce que *X* eſt à *Z* & *G* etant à *X* ce que *T*, ce que *P* eſt à *Z*, *F* & *G* ſont egales à *D*. *D* eſt donc à *F* ce que *F* eſt à *G*, ce que *G* eſt à *M par Theor. 130. Cor. 1.* Si *XY* ſont inegales, *D* eſt à *F* ce que *F* eſt à *G*, ce que *G* eſt à *M par Theor. 161. 160 & 166.*

Si une grandeur *A* & d' autres grandeurs etoient la quatrieme, la cinquieme puiſſance de *V* &c. on prouvera de même que *A* & ces autres grandeurs auroient auſſi les conditions enoncées ou indiquées dans la Definition. *V* eſt donc un binome, *XY* ſont les termes de *V*, *P* Σ T ſont les termes de *N*, *D* Θ Λ *M* ſont les termes de *B*.

EXEMPLE. Une ligne etant diviſée en deux, le quarré de cette ligne eſt egal aux quarrez de ſes deux parties & à deux rectangles ſous les mêmes parties. Le cube de cette ligne eſt egal aux cubes de ſes deux parties, à trois parallelepipedes ſous le quarré de l'une de ſes parties & l'autre partie & à trois parallelepipedes ſous le quarré de cette ſeconde partie & la premiere.

THEOREME CLXVIII.

Un binome etant elevé à deux puissances telles que l'exposant de l'une ait une unité de moins que celui de l'autre : si le premier terme de la racine est elevé à une certaine puissance dans le premier ou le second ou le troisieme terme de celle là & ainsi de suite, il est elevé à la même puissance dans le second ou le troisieme ou le quatrieme terme de celle ci & ainsi de suite ; mais si le second terme de la racine est elevé à une certaine puissance dans le second ou le troisieme ou le quatrieme terme de celle là & ainsi de suite, il est elevé à la même puissance dans le second ou le troisieme ou le quatrieme terme de celle ci & ainsi de suite. Soit V un binome, X le premier terme de V, Y le second. Soient $N\,B$ deux puissances de V telles que l'exposant de N ait une unité de moins que l'exposant de B. Si X est elevé à une certaine puissance dans le premier terme de N, X est elevé à la même puissance dans le second terme de B & si X est elevé à une certaine puissance dans le second terme de N, X est elevé à la même puissance dans le troisieme terme de B &c. Mais si Y est elevé à une certaine puissance dans le second terme de N, Y est elevé à la même puissance dans le second terme de B & si Y est elevé à une certaine puissance dans le troisieme terme de N, Y est elevé à la même puissance dans le troisieme terme de B &c.

V etant

V etant un binome dont *X* eſt le premier & *Y* le ſecond terme, à quelque puiſſance que *V* ſoit elevé, l'expoſant de cette puiſſance de *V* eſt auſſi l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le premier terme de cette puiſſance de *V* & l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le dernier terme de cette puiſſance de *V*. La ſeconde puiſſance de *V* a trois termes, la troiſieme puiſſance de *V* a quatre termes &c. Il paroit donc *par Theor. 160.* que l'expoſant de la puiſſance de *X* a une unité de moins dans le ſecond terme de toute puiſſance de *V* que dans le premier, une unité de moins dans le troiſieme terme que dans le ſecond &c.

N B etant deux puiſſances de *V* telles que l'expoſant de *N* a une unité de moins que l'expoſant de *B* : ſi donc *X* eſt elevé à une certaine puiſſance dans le premier terme de *N*, *X* eſt elevé à cette même puiſſance dans le ſecond terme de *B* & ſi *X* eſt elevé à une certaine puiſſance dans le ſecond terme de *N*, *X* eſt elevé à cette même puiſſance dans le troiſieme terme de *B* &c.

Mais il paroit auſſi *par Theor. 160.* que *Y* eſt dans le ſecond terme de toute puiſſance de *V*, que *Y* eſt elevé à la ſeconde puiſſance dans le troiſieme terme, à la troiſieme puiſſance dans le quatrieme terme &c.

THEOREME CLXIX.

Si dans la puiſſance d'un binome trois termes conſecutifs ſont tels que le coefficient du premier ſoit

ſoit au coefficient du ſecond ce que l'expoſant du ſecond terme de la racine dans le ſecond eſt à l'expoſant du premier terme de la racine dans le premier & que le coefficient du ſecond ſoit au coefficient du troiſieme ce que l'expoſant du ſecond terme de la racine dans le troiſieme eſt à l'expoſant du premier terme de la racine dans le ſecond, la ſomme de deux nombres ſemblables aux coefficiens du premier & du ſecond eſt à la ſomme de deux nombres ſemblables aux coefficiens du ſecond & du troiſieme ce que l'expoſant du ſecond terme de la racine dans le troiſieme eſt à l'expoſant du premier terme de la racine dans le premier. Soit V un binome dont X ſoit le premier terme, Y le ſecond. Soit m l'expoſant d'une puiſſance de V. Soient $A B C$ des termes de cette puiſſance tels que A ſoit le premier terme, B le ſecond, C le troiſieme ou que A ſoit le ſecond, B le troiſieme, C le quatrieme &c. Soit a le coefficient de A, b le coefficient de B, c le coefficient de C. Soit P la ſomme de deux nombres dont l'un ſoit ſemblable à a & l'autre à b, Q la ſomme de deux nombres dont l'un ſoit ſemblable à b & l'autre à c. Si a eſt à b ce que l'expoſant de la puiſſance de Y dans B eſt à l'expoſant de la puiſſance de X dans A & que b ſoit à c ce que l'expoſant de la puiſſance de Y dans C eſt à l'expoſant de la puiſſance de X dans B, P eſt à Q ce que l'expoſant de Y dans C eſt à l'expoſant de X dans A.

V etant

V etant un binome elevé à une puiſſance dont *m* eſt l'expoſant, une partie de cette puiſſance eſt meſurée par *m par Theor. 164.* & par conſequent cette puiſſance ou une partie de cette puiſſance eſt meſurée par *m* augmenté de l'unité. *X* etant le premier & *Y* le ſecond terme de *V*, *m* eſt auſſi l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le premier terme de cette puiſſance de *V* & l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le dernier terme de cette puiſſance de *V*. La ſeconde puiſſance de *V* a trois termes, la troiſieme puiſſance de *V* a quatre termes &c.

Soit μ l'expoſant de la puiſſance à laquelle *Y* eſt elevé dans *A*. Il paroit *par Theor. 160.* que *m* diminué de μ eſt l'expoſant de *X* dans *A*, que *m* diminué de μ & de l'unité eſt l'expoſant de *X* dans *B*, que μ augmenté de l'unité eſt l'expoſant de *Y* dans *B* & que μ augmenté de l'unité priſe deux fois eſt l'expoſant de *Y* dans *C*.

a etant à *b* ce que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans *B* eſt à l'expoſant de la puiſſance de *X* dans *A*, *a* eſt donc à *b* ce que μ augmenté de l'unité eſt à *m* diminué de μ. *P* etant la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable à *a* & l'autre à *b*, *P* eſt donc à *b* ce que *m* augmenté de l'unité eſt à *m* diminué de μ *par Theor. 112.* *b* etant à *c* ce que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans *C* eſt à l'expoſant de la puiſſance de *X* dans *B*, *b* eſt à *c* ce que μ augmenté de l'unité priſe deux fois eſt

à *m*

à m diminué de μ & de l'unité. Q etant la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable à b & l'autre à c, b eſt donc à Q ce que μ augmenté de l'unité priſe deux fois eſt à m augmenté de l'unité. Donc *par Theor. 128. Cor.* P eſt à Q ce que μ augmenté de l'unité priſe deux fois eſt à m diminué de μ, ce que l'expoſant de la puiſſance de Y dans C eſt à l'expoſant de la puiſſance de X dans A.

THEOREME CLXX.

Si de deux termes de la puiſſance d'un binome l'un precede l'autre immediatement, le coefficient de celui là eſt au coefficient de celui ci ce que l'expoſant du ſecond terme de la racine dans celui ci eſt à l'expoſant du premier terme de la racine dans celui là. Soit V un binome dont X ſoit le premier terme, Y le ſecond. Si deux termes d'une puiſſance de V ſont tels que l'un ſoit le premier terme, l'autre le ſecond, ou que l'un ſoit le ſecond, l'autre le troiſieme &c. le coefficient de celui là eſt au coefficient de celui ci ce que l'expoſant de la puiſſance de Y dans celui ci eſt à l'expoſant de la puiſſance de X dans celui là.

V etant un binome dont X eſt le premier terme & Y le ſecond, le coefficient de X eſt au coefficient de Y ce que l'expoſant de Y eſt à l'expoſant de X.

La

La ſeconde puiſſance de V a trois termes, la troiſieme puiſſance de V a quatre termes &c. & à quelque puiſſance que V ſoit elevé, l'expoſant de la puiſſance de V eſt auſſi l'expoſant de la puiſſance de X dans le premier terme de cette puiſſance de V & l'expoſant de la puiſſance de Y dans le dernier terme de cette puiſſance de V. Soit N la ſeconde puiſſance de V. L'expoſant de la puiſſance de X dans le premier terme de N & de la puiſſance de Y dans le dernier terme de N eſt donc l'unité priſe deux fois. Le coefficient du ſeçond terme de N etant la ſomme de deux nombres ſemblables aux coefficiens de X & de Y eſt auſſi une unité priſe deux fois. Le coefficient du ſecond terme de N eſt donc l'expoſant de la puiſſance de X dans le premier terme de N & l'expoſant de la puiſſance de Y dans le dernier terme de N.

Soit B la troiſieme puiſſance de V. Le coefficient du ſecond terme de B etant la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au coefficient du premier terme de N ou à l'unité & l'autre au coefficient du ſecond terme de N ou à l'expoſant de X dans le premier terme de N, ce coefficient du ſecond terme de B eſt l'expoſant de la puiſſance de X dans le premier terme de B. On voit donc par là que le coefficient du ſecond terme de chaque puiſſance de V eſt l'expoſant de la puiſſance de X dans le premier terme de cette puiſſance de V. Le coefficient du terme penultieme de B etant auſſi la

la ſomme de deux nombres dont l'un eſt ſemblable au coefficient du ſecond terme de *N* ou à l'expoſant de *Y* dans le dernier terme de *N* & l'autre au coefficient du troiſieme terme de *N* ou à l'unité, ce coefficient du terme penultieme de *B* eſt l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le dernier terme de *B*. On voit donc par là que le coefficient du terme penultieme de chaque puiſſance de *V* eſt l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le dernier terme de cette puiſſance de *V*. Or il paroit *par Theor. 160.* qu'en toute puiſſance de *V*, l'unité eſt l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le ſecond terme & de la puiſſance de *X* dans le penultieme. Donc le coefficient du premier terme de chaque puiſſance de *V* eſt au coefficient du ſecond terme ce que l'expoſant de *Y* dans le ſecond terme eſt à l'expoſant de *X* dans le premier & le coefficient du terme penultieme eſt au coefficient du dernier terme ce que l'expoſant de *Y* dans le dernier terme eſt à l'expoſant de *X* dans le penultieme.

Le coefficient du premier terme de *N* etant donc au coefficient du ſecond terme ce que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le ſecond eſt à l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le premier & le coefficient du ſecond terme de *N* etant au coefficient du dernier terme ce que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le dernier eſt à l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le ſecond, la ſomme de deux nombres ſemblables aux coefficiens du premier & du ſecond terme de *N*

eſt

eſt à la ſomme de deux nombres ſemblables aux coefficiens du ſecond & du troiſieme ce que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le troiſieme eſt à l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le premier *par Theor. 169.* Or le coefficient du ſecond terme de *B* eſt la ſomme de deux nombres ſemblables aux coefficiens du premier & du ſecond terme de *N* & le coefficient du troiſieme terme de *B* eſt la ſomme de deux nombres ſemblables aux coefficiens du ſecond & du troiſieme terme de *N*. De plus l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le premier terme de *N* eſt l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le ſecond terme de *B* au lieu que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le troiſieme terme de *N* eſt auſſi l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le troiſieme terme de *B par Theor. 168.* Le coefficient du ſecond terme de *B* eſt donc au coefficient du troiſieme terme de *B* ce que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans le troiſieme terme eſt à l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le ſecond. On voit donc par là que ſi une puiſſance de *V* a un troiſieme, un quatrieme terme &c. qui ne ſoit pas le dernier, le coefficient du terme qui precede celui là eſt au coefficient de celui là ce que l'expoſant de la puiſſance de *Y* dans celui là eſt à l'expoſant de la puiſſance de *X* dans le precedent.

COROLLAIRE.

Quel que ſoit donc l'expoſant de la puiſſance d'un binome, comme l'on connoit *par Theor. 160.* quels ſont les expoſans des deux termes de la racine dans tous les termes de cette puiſſance & comme le coefficient du premier terme eſt l'unité, on exprimera tous les termes de cette puiſſance ſans exprimer les puiſſances de ce binome qui ont un moindre expoſant.



LES



LES
PRINCIPES DE LA SCIENCE ET DES MATHEMATIQUES.

LIVRE III.

DEFINITION I.

Si de plusieurs grandeurs on en connoit une sans connoitre les autres, que de cellesci l'on en connoisse une sans connoitre les autres, que de cellesci on en connoisse une sans connoitre les autres & ainsi de suite, ces grandeurs forment une *suite* & la grandeur que l'on connoit sans connoitre les autres est la *premiere* grandeur de cette suite & de cellesci celle que l'on connoit sans connoitre les autres est la *seconde* & de cellesci celle que l'on connoit sans connoitre les autres est la *troisieme* &

ainſi de ſuite. Soient *E F G H* des grandeurs. Si l'on connoit *E* ſans connoitre aucune des grandeurs *F G H* & que l'on connoiſſe *F* ſans connoitre aucune des grandeurs *G H* & que l'on connoiſſe *G* ſans connoitre *H*, *EFGH* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme.

THEOREME I.

Si de pluſieurs grandeurs aucune n'eſt exprimée par les autres, ces grandeurs forment une ſuite. Soient *EFGH* des grandeurs telles qu'il ne ſuffiſe pas d'exprimer *EFG* pour exprimer *H*. *E F G H* forment une ſuite.

E F G H etant des grandeurs, ces grandeurs ſont connues. Aucune de ces grandeurs n'etant exprimée par les autres, on connoit donc quelqu'une de ces grandeurs ſans connoitre aucune des autres. Suppoſé donc que l'on connoiſſe *E* & que l'on ne connoiſſe aucune des grandeurs *F G H*. On connoit auſſi quelqu'une des grandeurs *F G H* ſans connoitre aucune des autres. Suppoſé donc que l'on connoiſſe *F* & que l'on ne connoiſſe aucune des grandeurs *G H*. On connoit auſſi l'une des grandeurs *G H* ſans connoitre l'autre. Suppoſé donc que l'on connoiſſe *G* ſans connoitre *H*. *E F G H* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme.

EXEMPLE. Si l'on nous compte dix pieces de monnoye, nous voyons dix grandeurs diffe-

differentes les unes des autres. Auſſi voyons nous l'une de ces dix grandeurs ſans voir les autres, l'une de ces neuf grandeurs ſans voir les autres &c. Ces grandeurs forment donc une ſuite.

THEOREME II.

Si de pluſieurs grandeurs l'une eſt la premiere grandeur d'une ſuite qu'elle forme avec une autre, que celle ci ſoit la premiere grandeur d'une ſuite qu'elle forme avec une autre, que celle ci ſoit la premiere grandeur d'une ſuite qu'elle forme avec une autre & ainſi de ſuite, ces grandeurs forment une ſuite dont la premiere grandeur eſt la premiere grandeur de la premiere ſuite, la ſeconde eſt la premiere grandeur de la ſeconde ſuite, la troiſieme eſt la premiere grandeur de la troiſieme ſuite & ainſi de ſuite. Soient *EFGH* des grandeurs telles que *EF* forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur & *F* la ſeconde, que *FG* forment une ſuite dont *F* ſoit la premiere grandeur & *G* la ſeconde, que *GH* forment une ſuite dont *G* ſoit la premiere grandeur & *H* la ſeconde. *EFGH* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme.

Les grandeurs *EF* formant une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde, on connoit *E* ſans connoitre *F*. Les grandeurs *FG* formant une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde, on connoit *F* ſans con-

noitre *G* & puisque l'on connoit *F* & *G*, il s'ensuit que si l'on connoit *G* on connoit *F*. Or puisque l'on connoit *E* sans connoitre *F* & que si l'on connoit *G* on connoit *F*, on connoit *E* sans connoitre *G*.

Les grandeurs *G H* formant une suite dont *G* est la premiere grandeur & *H* la seconde, on connoit *G* sans connoitre *H* & puisque l'on connoit *G* & *H*, il s'ensuit que si l'on connoit *H* on connoit *G*. Or puisque l'on connoit *E* sans connoitre *G* & que si l'on connoit *H* on connoit *G*, on connoit *E* sans connoitre *H*.

Puisque l'on connoit *F* sans connoitre *G* & que si l'on connoit *H* on connoit *G*, on connoit *F* sans connoitre *H*.

Or puisque l'on connoit *E* sans connoitre aucune des grandeurs *FGH*, que l'on connoit *F* sans connoitre aucune des grandeurs *GH* & que l'on connoit *G* sans connoitre *H*, *EFGH* forment une suite dont *E* est la premiere grandeur, *F* la seconde, *G* la troisieme, *H* la quatrieme.

THEOREME III.

Une grandeur est la premiere d'une suite qu'elle forme avec une autre, si elle est partie d'une grandeur qui soit la premiere d'une suite qu'elle forme avec l'autre. Soient *D E F* des grandeurs telles que *D F* forment une suite dont *D* soit la premiere grandeur & *F* la seconde. Si *E* est une partie de *D*, *E F* forment une suite dont *E* est la premiere grandeur & *F* la seconde.

Les

Les grandeurs *D F* formant une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde, on connoit *D* ſans connoitre *F*. Or puiſque l'on connoit *D* ſans connoitre *F*, tout ce que *D* exprime eſt connu ſans connoitre *F*. *E* etant une partie de *D*, on connoit donc *E* ſans connoitre *F* & par conſequent *E F* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde.

THEOREME IV.

Une grandeur eſt la ſeconde d'une ſuite qu'elle forme avec une autre, ſi elle eſt partie d'une grandeur qui ſoit la ſeconde d'une ſuite qu'elle forme avec l'autre. Soient *E H I* des grandeurs telles que *E H* forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur & *H* la ſeconde. Si *I* eſt une partie de *H*, *E I* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *I* la ſeconde.

Les grandeurs *E H* formant une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde, on connoit *E* ſans connoitre *H*. *I* etant une partie de *H*, *H* eſt epuiſée par les coordonnées *I K*. Si l'on ne connoiſſoit donc pas *E* ſans connoitre *I*, on exprimeroit que l'on connoit *E* ſans connoitre *H* en diſant que l'on connoit *E* ſans connoitre *K*. Ainſi en diſant que l'on connoit *E* ſans connoitre *H* on donne à entendre que l'on connoit *E* ſans connoitre aucune partie de *H*. Donc *E I* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *I* la ſeconde.

THEOREME V.

Une grandeur eſt la premiere d'une ſuite qu'elle forme avec une autre, ſi elle eſt epuiſée par deux grandeurs dont chacune ſoit la premiere d'une ſuite qu'elle forme avec l'autre. Soient *D E F H* des grandeurs telles que *E H* forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur & *H* la ſeconde & que *F H* forment une ſuite dont *F* ſoit la premiere grandeur & *H* la ſeconde. Si *D* eſt epuiſée par *E F*, *D H* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde.

Les grandeurs *DEFH* etant telles que *EH* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde, on connoit *E* ſans connoitre *H* & puiſque *F H* forment une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde, on connoit *F* ſans connoitre *H*. Or *D* etant epuiſée par *E F*, il ſuffit de connoitre *E* & *F* pour connoitre *D*. On connoit donc *D* ſans connoitre *H* & par conſequent *D H* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde.

THEOREME VI.

Une grandeur eſt la ſeconde d'une ſuite qu'elle forme avec une autre, ſi elle eſt epuiſée par deux grandeurs dont chacune ſoit la ſeconde d'une ſuite qu'elle forme avec l'autre. Soient *EHIK* des grandeurs telles que *E I* forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur & *I* la ſeconde & que

que *EK* forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur & *K* la ſeconde. Si *H* eſt epuiſée par *IK*, *EH* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde.

Les grandeurs *EHIK* etant telles que *EI* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *I* la ſeconde, on connoit *E* ſans connoitre *I* & puisque *EK* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *K* la ſeconde, on connoit *E* ſans connoitre *K*. Or *H* etant epuiſée par *IK*, il ſuffit de connoitre *H* pour connoitre *I* & *K*. On connoit donc *D* ſans connoitre *H* & par conſequent *EH* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde.

THEOREME VII.

Si pluſieurs grandeurs forment une ſuite, la premiere & la ſeconde forment une ſuite dont la premiere grandeur eſt cette premiere & la ſeconde cette ſeconde; la premiere, la ſeconde & la troiſieme forment une ſuite dont la premiere grandeur eſt cette premiere, la ſeconde cette ſeconde & la troiſieme cette troiſieme & ainſi de ſuite. Soient *EFGH* des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. *EF* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde. *EFG* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme.

EFGH etant des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme, on connoit *E* ſans connoitre aucune des grandeurs *FGH* & l'on connoit *F* ſans connoitre aucune des grandeurs *GH*. Or puiſque l'on connoit *E* ſans connoitre *F*, *EF* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde & puiſque l'on connoit *E* ſans connoitre aucune des grandeurs *FG* & que l'on connoit *F* ſans connoitre *G*, *EFG* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde & *G* la troiſieme.

COROLLAIRE.

Puiſque l'on connoit *E* ſans connoitre *G*, *EG* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde. * De pluſieurs grandeurs qui forment une ſuite, la premiere & toute autre forment une ſuite dont cette premiere eſt la premiere grandeur.

THEOREME VIII.

Si une grandeur forme avec d'autres une ſuite dont celle là ſoit la premiere, les autres forment une autre ſuite qui eſt telle que la ſeconde grandeur de celle là eſt la premiere grandeur de celle ci, que la troiſieme de celle là eſt la ſeconde de celle ci & ainſi de ſuite. Soient *EFGH* des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. *FGH* forment une ſuite

ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur, *G* la ſeconde, *H* la troiſieme.

Les grandeurs *E F G H* formant une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme, on connoit *F* ſans connoitre aucune des grandeurs *G H* & l'on connoit *G* ſans connoitre *H*. Donc *FGH* forment une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur, *G* la ſeconde, *H* la troiſieme.

DEFINITION II.

La ſuite que pluſieurs grandeurs forment eſt un *lieu* ou une ſuite *ſimultanée* ſi ces grandeurs forment une autre ſuite & que la derniere grandeur de cette ſuite là ſoit la premiere grandeur de celle ci, que la penultieme de cette ſuite là ſoit la ſeconde de celle ci, que l'antepenultieme de celle là ſoit la troiſieme de celle ci & ainſi de ſuite. Soient *E F G H* des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. Si *EFGH* forment une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur, *G* la ſeconde, *F* la troiſieme, *E* la quatrieme, l'une & l'autre de ces ſuites que forment *E F G H* eſt ſimultanée.

THEOREME IX.

La ſuite que forment pluſieurs grandeurs eſt ſimultanée, ſi la premiere & la ſeconde de ces grandeurs formant une ſuite ſimultanée, la ſeconde & la troiſieme forment une ſuite ſimultanée, la troiſieme

ſieme & la quatrieme forment une ſuite ſimultanée & ainſi de ſuite. Soient *EFGH* des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. Si *EF* forment une ſuite ſimultanée, que *FG* forment une ſuite ſimultanée & que *GH* forment une ſuite ſimultanée, cette ſuite que forment *EFGH* eſt ſimultanée.

Les grandeurs *EFGH* formant une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme: puiſque *EF* forment une ſuite ſimultanée, *EF* forment une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur & *E* la ſeconde & puiſque *FG* forment une ſuite ſimultanée, *FG* forment une ſuite dont *G* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde & puiſque *GH* forment une ſuite ſimultanée, *GH* forment une ſuite dont *H* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde.

Donc *par Theor. 2.* *EFGH* forment une ſuite dont *H* eſt la premiere grandeur, *G* la ſeconde, *F* la troiſieme, *E* la quatrieme & par conſequent l'une & l'autre de ces ſuites que forment *EFGH* eſt une ſuite ſimultanée.

EXEMPLE. A l'entrée d'un jardin eſt un parterre où j'ai vû dernierement des plantes qui formoient une ſuite, la Balſamine, l'Oeillet d'Inde, le Thlaſpi &c. Mais en ſortant du jardin ces plantes ſe ſont preſentées à mes yeux de maniere que le Thlaſpi étoit la premiere grandeur d'une ſuite

ſuite qu'il formoit avec l'Oeillet d'Inde & que l'Oeillet d'Inde etoit la premiere grandeur d'une ſuite qu'il formoit avec la Balſamine. La ſuite que formoient toutes ces plantes etoit donc une ſuite ſimultanée.

THEOREME X.

De pluſieurs grandeurs qui forment une ſuite ſimultanée la premiere & toute autre forment une ſuite ſimultanée. Soient *E F G H* des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. Si cette ſuite que forment *EFGH* eſt ſimultanée, *E* & chacune des grandeurs *FGH* forment une ſuite ſimultanée.

Les grandeurs *E F G H* formant une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme, *E H* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde *par Theor.* 7. *Cor.* Mais puiſque cette ſuite que forment *EFGH* eſt ſimultanée, *EFGH* forment une ſuite dont *H* eſt la premiere grandeur, *G* la ſeconde, *F* la troiſieme, *E* la quatrieme. *E H* forment donc *par Theor.* 7. *Cor.* une ſuite dont *H* eſt la premiere grandeur & *E* la ſeconde & par conſequent la ſuite que forment *E H* eſt ſimultanée.

Par Theor. 7. *EFG* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme & *par Theor.* 8 *EFG* forment une ſuite dont *G* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde,

E la

E la troisieme. On prouvera donc aussi que *EG* forment une suite simultanée.

On le prouvera donc aussi de *EF*.

THEOREME XI.

De trois grandeurs, deux formant une suite simultanée, chacune des deux forme une suite simultanée avec l'autre, si l'une des deux forme une suite simultanée avec l'autre. Soient *EFG* des grandeurs telles que *EF* forment une suite simultanée. Si *FG* forment une suite simultanée, *EG* forment une suite simultanée.

Les grandeurs *EFG* etant telles que *EF* forment une suite simultanée, *EF* forment une suite dont *E* est la premiere grandeur & *F* la seconde & puisque *FG* forment une suite simultanée, *FG* forment une suite dont *F* est la premiere grandeur & *G* la seconde. *EFG* forment donc une suite dont *E* est la premiere grandeur, *F* la seconde, *G* la troisieme *par Theor. 2.* & cette suite est simultanée *par Theor. 9.* Donc *par Theor. 10.* *EG* forment une suite simultanée.

THEOREME XII.

Si plusieurs grandeurs forment une suite simultanée, la premiere & la seconde forment une suite simultanée, la seconde & la troisieme forment une suite simultanée & ainsi de suite. Soient *EFGH* des grandeurs qui forment une suite simultanée dont *E* soit la premiere grandeur, *F* la

la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. *EF* forment une ſuite ſimultanée, *FG* forment une ſuite ſimultanée, *GH* forment une ſuite ſimultanée.

Les grandeurs *EFGH* formant une ſuite ſimultanée dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme, *EF* forment une ſuite ſimultanée *par Theor. 10.*

EG forment auſſi une ſuite ſimultanée *par Theor. 10.* & puiſque *EF* forment une ſuite ſimultanée *FG* forment une ſuite ſimultanée *par Theor. 11.*

EH forment auſſi une ſuite ſimultanée *par Theor. 10.* & puiſque *EG* forment une ſuite ſimultanée, *GH par Theor. 11.* forment une ſuite ſimultanée.

THEOREME XIII.

Une grandeur forme une ſuite ſimultanée avec une autre, ſi elle eſt partie d'une grandeur qui forme une ſuite ſimultanée avec l'autre. Soient *DEF* des grandeurs telles que *DF* forment une ſuite ſimultanée. Si *E* eſt une partie de *D*, *EF* forment une ſuite ſimultanée.

Les grandeurs *DF* formant une ſuite ſimultanée, *DF* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde & puiſque *E* eſt une partie de *D*, *EF* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde *par Theor. 3.*

Mais

Mais *D F* forment auſſi une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur & *D* la ſeconde. Donc *par Theor. 4.* *E F* forment une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur & *E* la ſeconde. Par conſequent *E F* forment une ſuite ſimultanée.

THEOREME XIV.

Une grandeur forme une ſuite ſimultanée avec une autre, ſi elle eſt epuiſée par deux grandeurs dont chacune forme une ſuite ſimultanée avec l'autre. Soient *D E F H* des grandeurs telles que *EH* forment une ſuite ſimultanée & que *FH* forment une ſuite ſimultanée. Si *D* eſt epuiſée par *EF*, *DH* forment une ſuite ſimultanée.

Les grandeurs *DEFH* etant telles que *EH* forment une ſuite ſimultanée, *E H* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde & puisque *FH* forment une ſuite ſimultanée, *F H* forment une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde. *D* etant epuiſée par *EF*, *DH* forment donc *par Theor. 5.* une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde.

Mais *E H* forment auſſi une ſuite dont *H* eſt la premiere grandeur & *E* la ſeconde & *FH* forment auſſi une ſuite dont *H* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde. Donc *par Theor. 6.* *D H* forment une ſuite dont *H* eſt la premiere grandeur & *D* la ſeconde. Par conſequent *D H* forment une ſuite ſimultanée.

DEFI-

DEFINITION III.

La ſuite que pluſieurs grandeurs forment eſt un *temps* ou une ſuite *ſucceſſive*, ſi toute autre ſuite que ces grandeurs forment eſt telle que la premiere grandeur de cette ſuite là ſoit la premiere de celle ci, que la ſeconde de celle là ſoit la ſeconde de celle ci & ainſi de ſuite. Soient *EFGH* des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. Si *EFGH* ne forment aucune ſuite dont *E* ne ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme, la ſuite formée par *E F G H* eſt ſucceſſive.

THEOREME XV.

La ſuite que pluſieurs grandeurs forment eſt ſucceſſive ſi la premiere & la ſeconde de ces grandeurs formant une ſuite ſucceſſive, la ſeconde & la troiſieme forment une ſuite ſucceſſive, la troiſieme & la quatrieme forment une ſuite ſucceſſive & ainſi de ſuite. Soient *E F G H* des grandeurs qui forment une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. Si *EF* forment une ſuite ſucceſſive, que *F G* forment une ſuite ſucceſſive, que *G H* forment une ſuite ſucceſſive, la ſuite que forment *EFGH* eſt ſucceſſive.

Les grandeurs *E F G H* formant une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme, *E F* forment

 une

une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde *par Theor.* 7. *E F* formant une ſuite ſucceſſive, *E F* ne forment donc pas une ſuite dont *F* ſoit la premiere grandeur & *E* la ſeconde. Il paroit donc *par Theor.* 7. *Cor.* que *E F G H* ne forment pas une ſuite dont *F* ſoit la premiere grandeur.

FGH forment une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur, *G* la ſeconde, *H* la troiſieme *par Theor.* 8. *FG* forment donc une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde *par Theor.* 7. *F G* formant une ſuite ſucceſſive, *FG* ne forment donc pas une ſuite dont *G* ſoit la premiere grandeur & *F* la ſeconde. Il paroit donc encore *par Theor.* 7. *Cor.* que *E F G H* ne forment pas une ſuite dont *G* ſoit la premiere grandeur.

G H forment une ſuite dont *G* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde *par Theor.* 8. *G H* formant une ſuite ſucceſſive, ne forment donc pas une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur & *G* la ſeconde. Il paroit donc encore *par Theor.* 7. *Cor.* que *E F G H* ne forment pas une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur.

E F G H ne forment donc aucune ſuite dont *E* ne ſoit la premiere grandeur.

Puiſque *F G H* forment une ſuite dont *F* eſt la premiere grandeur, *G* la ſeconde, *H* la troiſieme, que *F G* forment une ſuite ſucceſſive & que *G H* forment une ſuite ſucceſſive, on prou-

prouvera donc auſſi que *F G H* ne forment aucune ſuite dont *F* ne ſoit la premiere grandeur. Donc *par Theor. 8.* *E F G H* ne forment aucune ſuite dont *F* ne ſoit la ſeconde grandeur.

Puiſque *G H* ne forment pas une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur & *G* la ſeconde, *G H* ne forment aucune ſuite dont *G* ne ſoit la premiere grandeur. Donc *par Theor. 8.* *E F G H* ne forment aucune ſuite dont *G* ne ſoit la troiſieme grandeur & *H* la quatrieme.

La ſuite que forment *E F G H* eſt donc ſucceſſive.

EXEMPLE. Je regarde les Oſcillations d'un Pendule. Les Oſcillations *A B* forment une ſuite ſucceſſive, c'eſt à dire qu'elles forment une ſuite dont *A* eſt la premiere grandeur & *B* la ſeconde & qu'elles ne forment pas une ſuite dont *B* ſoit la premiere grandeur & *A* la ſeconde. Il en eſt de même des oſcillations *B C* & des oſcillations *C D*. Les oſcillations *A B C D* forment donc une ſuite & une ſuite ſucceſſive.

THEOREME XVI.

Si pluſieurs grandeurs forment une ſuite ſucceſſive, la premiere & la ſeconde forment une ſuite ſucceſſive dont celle là eſt la premiere; la ſeconde & la troiſieme forment une ſuite ſucceſſive dont celle là eſt la premiere & ainſi de ſuite. Soient *E F G H* des grandeurs qui forment une ſuite ſucceſſive dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la

 ſecon-

feconde, *G* la troifieme, *H* la quatrieme. *EF* forment une fuite fucceffive dont *E* eft la premiere grandeur & *F* la feconde, *FG* forment une fuite fucceffive dont *F* eft la premiere grandeur & *G* la feconde, *GH* forment une fuite fucceffive dont *G* eft la premiere grandeur & *H* la feconde.

Les grandeurs *EFGH* formant une fuite dont *E* eft la premiere grandeur, *F* la feconde, *G* la troifieme, *H* la quatrieme, *EF* forment une fuite dont *E* eft la premiere grandeur & *F* la feconde *par Theor. 7.* Cette fuite que forment *EFGH* etant fucceffive, *EFGH* ne forment pas une fuite dont *F* foit la premiere grandeur. Donc puifque l'on connoit *E* & *F* fans connoitre aucune des grandeurs *GH*, on ne connoit pas *F* fans connoitre *E*. *EF* ne forment donc pas une fuite dont *F* foit la premiere grandeur & *E* la feconde & par confequent la fuite que forment *EF* eft fucceffive.

FGH forment une fuite dont *F* eft la premiere grandeur, *G* la feconde, *H* la troifieme *par Theor. 8.* d'où il fuit *par Theor. 7.* que *FG* forment une fuite dont *F* eft la premiere grandeur & *G* la feconde. Or puifque *EFGH* ne forment pas une fuite dont *G* foit la feconde grandeur, quoique l'on connoiffe *E* fans connoitre aucune des grandeurs *FGH* & que l'on connoiffe *F* & *G* fans connoitre *H*, il s'enfuit que l'on ne connoit pas *G* fans connoitre *F*. *FG* ne forment donc pas une fuite dont *G* foit la premiere

miere grandeur & *F* la ſeconde & par conſequent la ſuite que forment *FG* eſt ſucceſſive.

GH forment une ſuite dont *G* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde *par Theor. 8.* Or puisque *EFGH* ne forment pas une ſuite dont *H* ſoit troiſieme grandeur, quoique l'on connoiſſe *E* ſans connoitre aucune des grandeurs *FGH* & que l'on connoiſſe *F* ſans connoitre aucune des grandeurs *GH*, il s'enſuit que l'on ne connoit pas *H* ſans connoitre *G*. *GH* ne forment donc pas une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur & *G* la ſeconde & par conſequent la ſuite que forment *GH* eſt ſucceſſive.

THEOREME XVII.

De pluſieurs grandeurs qui forment une ſuite ſucceſſive la premiere & toute autre forment une ſuite ſucceſſive dont celle là eſt la premiere grandeur. Soient *EFGH* des grandeurs qui forment une ſuite ſucceſſive dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme. *E* & chacune des grandeurs *FGH* forment une ſuite ſucceſſive dont *E* eſt la premiere grandeur & cette autre la ſeconde.

Les grandeurs *EFGH* formant une ſuite ſucceſſive dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde, *G* la troiſieme, *H* la quatrieme, *EF* forment une ſuite ſucceſſive dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde *par Theor. 16.*

E G forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde *par Theor. 7. Cor.* Or *F G* formant *par Theor. 16.* une ſuite ſucceſſive dont *F* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde, *F G* ne forment pas une ſuite dont *G* ſoit la premiere grandeur & *F* la ſeconde. *E F G* ne forment donc pas une ſuite dont *G* ſoit la premiere grandeur, *E* la ſeconde & *F* la troiſieme *par Theor. 7. Cor.* Donc *par Theor. 2.* *E G* ne forment pas une ſuite dont *G* ſoit la premiere grandeur & *E* la ſeconde & par conſequent la ſuite que forment *E G* eſt ſucceſſive.

E H forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde *par Theor. 7. Cor.* Or *G H* formant *par Theor. 16.* une ſuite ſucceſſive dont *G* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde, *G H* ne forment pas une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur & *G* la ſeconde. *E G H* ne forment donc pas une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur, *E* la ſeconde & *G* la troiſieme *par Theor. 7. Cor.* Donc *par Theor. 2.* *E H* ne forment pas une ſuite dont *H* ſoit la premiere grandeur & *E* la ſeconde & par conſequent la ſuite que forment *E H* eſt ſucceſſive.

THEOREME XVIII.

De trois grandeurs deux formant une ſuite ſimultanée, chacune des deux eſt la premiere d'une ſuite ſucceſſive qu'elle forme avec l'autre, ſi l'une des deux eſt la premiere d'une ſuite ſucceſſive qu'elle forme avec l'autre. Soient *D E F* des grandeurs

deurs telles que *D E* forment une ſuite ſimultanée. Si *E F* forment une ſuite ſucceſſive dont *E* ſoit la premiere grandeur & *F* la ſeconde, *D F* forment une ſuite ſucceſſive dont *D* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde.

Les grandeurs *D E F* etant telles que *D E* forment une ſuite ſimultanée, *D E* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *E* la ſeconde & puiſque *E F* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde, *D E F* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur, *E* la ſeconde, *F* la troiſieme *par Theor.* 2. Donc *par Theor.* 7. *Cor. D F* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde.

Mais puiſque *D E* forment une ſuite ſimultanée & que *E F* forment une ſuite ſucceſſive, il paroit *par Theor.* 11. que *D F* ne forment pas une ſuite ſimultanée. *D F* ne forment donc pas une ſuite dont *F* ſoit la premiere grandeur & *D* la ſeconde & par conſequent la ſuite que forment *D F* eſt ſucceſſive.

THEOREME XIX.

De trois grandeurs deux formant une ſuite ſimultanée, chacune des deux eſt la ſeconde d'une ſuite ſucceſſive qu'elle forme avec l'autre, ſi l'une des deux eſt la ſeconde d'une ſuite ſucceſſive qu'elle forme avec l'autre. Soient *D E F* des grandeurs telles que *E F* forment une ſuite ſimultanée. Si *D E* forment une ſuite ſucceſſive dont *D* ſoit la

premiere grandeur & *E* la ſeconde, *DF* forment une ſuite ſucceſſive dont *D* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde.

Les grandeurs *D E F* etant telles que *EF* forment une ſuite ſimultanée, *EF* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde & puisque *D E* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *E* la ſeconde, *D E F* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur, *E* la ſeconde, *F* la troiſieme *par Theor. 2.* Donc *par Theor. 7. Cor.* *DF* forment une ſuite dont *D* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde.

Mais puisque *E F* forment une ſuite ſimultanée & que *D E* forment une ſuite ſucceſſive, il paroit *par Theor. 11.* que *D F* ne forment pas une ſuite ſimultanée. *DF* ne forment donc pas une ſuite dont *F* ſoit la premiere grandeur & *D* la ſeconde & par conſequent la ſuite que forment *DF* eſt ſucceſſive.

THEOREME XX.

De quatre grandeurs deux formant une ſuite ſimultanée & les autres formant auſſi une ſuite ſimultanée, l'une de celles là eſt la premiere d'une ſuite ſucceſſive qu'elle forme avec l'une de celles ci, ſi l'autre de celles là eſt la premiere d'une ſuite ſucceſſive qu'elle forme avec l'autre de celles ci. Soient *C D G H* des grandeurs telles que *CD* forment une ſuite ſimultanée & que *GH* forment une ſuite ſimultanée. Si *C G* forment une ſuite ſucceſſive

ſucceſſive dont *C* ſoit la premiere grandeur & *G* la ſeconde, *D H* forment une ſuite ſucceſſive dont *D* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde.

Les grandeurs *CDGH* etant telles que *CD* forment une ſuite ſimultanée & que *CG* forment une ſuite ſucceſſive dont *C* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde, *DG* forment une ſuite ſucceſſive dont *D* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde *par Theor. 18.* Or puiſque *GH* forment une ſuite ſimultanée & que *D G* forment une ſuite ſucceſſive dont *D* eſt la premiere grandeur & *G* la ſeconde, *D H* forment *par Theor. 19.* une ſuite ſucceſſive dont *D* eſt la premiere grandeur & *H* la ſeconde.

DEFINITION IV.

Une grandeur *eſt dans* un temps ſi elle forme une ſuite ſimultanée avec une des grandeurs qui forment un temps. Deux grandeurs ſont *à la fois* ſi une des grandeurs qui forment un temps forme une ſuite ſimultanée avec l'une & une ſuite ſimultanée avec l'autre. Une grandeur eſt *avant* une autre ſi de deux grandeurs qui forment un temps la premiere forme une ſuite ſimultanée avec celle là & la ſeconde avec celle ci. La grandeur avant laquelle eſt une autre eſt *après* celle ci. Soient *E F G* &c. des grandeurs qui forment un temps. Si une grandeur *O* forme une ſuite ſimultanée avec *E*, *O* eſt dans un temps. Si *E* formant une ſuite ſimultanée avec *O*, *E* forme auſſi une ſuite ſimultanée avec une

grandeur *P*, *O* & *P* ſont à la fois. Si *EF* formant une ſuite dont *E* ſoit la premiere grandeur & *F* la ſeconde, *E* forme une ſuite ſimultanée avec une grandeur *Q* & que *F* forme une ſuite ſimultanée avec une grandeur *R*, *Q* eſt avant *R* & *R* eſt aprés *Q*.

THEOREME XXI.

Si deux grandeurs qui ſont dans un temps ne ſont pas à la fois, l'une eſt avant l' autre. Soient *A* & *B* deux grandeurs qui ſoient dans un temps. Si *A* & *B* ne ſont pas à la fois, l'une de ces grandeurs eſt avant l' autre.

Puiſque les grandeurs *A B* ſont dans un temps, *E* une des grandeurs qui forment un temps forme une ſuite ſimultanée avec *A* & *I* une des grandeurs qui forment un temps forme une ſuite ſimultanée avec *B*. Si *E* exprime *I*, *E A* formant une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *I A* forment une ſuite dont *I* eſt la premiere grandeur. *A E* formant une ſuite dont *A* eſt la premiere grandeur, *I E* forment donc une ſuite *par Theor.* 2. Si *I* n'eſt pas exprimée par *E* ni *E* par *I*, *E I* forment auſſi une ſuite *par Theor.* 1.

Or *A B* n'etant pas à la fois il paroit *par Theor.* 11. que la ſuite que forment *E I* n'eſt pas ſimultanée. *E I* formant une ſuite ſucceſſive, *A* eſt donc avant ou aprés *B*.

EXEM-

EXEMPLE. Je vois d'une fenetre une perſonne qui ſort de ſa maiſon & j'entens une autre perſonne qui parle dans la rue. Les differentes hauteurs où le Soleil ſe trouve par le mouvement diurne forment un temps. L'une de ces perſonnes paſſant le ſeuil de ſa porte eſt une grandeur qui forme une ſuite ſimultanée avec le Soleil etant à une certaine hauteur. L'autre perſonne parlant dans la rue forme auſſi une ſuite ſimultanée avec une certaine hauteur du Soleil. Cette perſonne qui ſort & cette perſonne qui parle ſont donc dans un temps. Si les hauteurs du Soleil avec lesquelles ces perſonnes forment une ſuite ſimultanée ſont la même, ces perſonnes dont l'une ſort & l'autre parle, ſont à la fois. Mais ces deux hauteurs du Soleil, ſi elles ne ſont pas la même, forment une ſuite ſucceſſive. Une premiere hauteur du Soleil forme donc une ſuite ſimultanée avec l'une de ces perſonnes & une ſeconde hauteur du Soleil forme une ſuite ſimultanée avec l'autre perſonne. C'eſt donc avant que l'une de ces perſonnes ſorte ou après qu'elle eſt ſortie, que l'autre parle.

Mais il n'eſt pas neceſſaire que je trouve hors de moi le temps dans lequel ſont ces deux perſonnes. Un homme forme une ſuite ſucceſſive d'Etres penſans. Si l'une & l'autre de ces perſonnes forme une ſuite ſimultanée avec moi ayant une certaine idée, cette perſonne ſortante & cette perſonne parlante ſont à la fois & ſi l'une forme une ſuite ſimultanée avec moi ayant une pre-

premiere idée & l'autre avec moi ayant une seconde idée, l'une est avant l'autre.

COROLLAIRE.

Si donc deux grandeurs qui ne sont pas à la fois sont avant ou après une troisieme, l'une de ces grandeurs est avant l'autre.

THEOREME XXII.

De trois grandeurs, deux etant à la fois, chacune des deux & l'autre sont à la fois, si l'une des deux & l'autre sont à la fois. Soient *A B C* des grandeurs telles que *A B* soient à la fois. Si *B C* sont à la fois, *A C* sont à la fois.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A B* sont à la fois, *E* une des grandeurs qui forment un temps forme une suite simultanée avec *A* & une suite simultanée avec *B* & puisque *BC* sont à la fois, *I* une des grandeurs qui forment un temps forme une suite simultanée avec *B* & une suite simultanée avec *C*. Donc *B C* forment une suite simultanée *par Theor. 11.* & par la même raison *EC* forment une suite simultanée. *E* formant une suite simultanée avec *A* & une suite simultanée avec *C*, *A* & *C* sont donc à la fois.

COROLLAIRE I.

Supposé que *C* soit une partie de *B*. *E C* forment une suite simultanée *par Theor. 13.* *B C* sont donc à la fois.

La partie d'une grandeur qui est dans un temps & cette grandeur sont à la fois.

COROL-

COROLLAIRE II.

Supposé que *C* soit une partie de *B*. *A B* etant à la fois, *B C* sont donc à la fois & par consequent *A C* sont à la fois. Deux grandeurs qui sont à la fois & la partie de l'une de ces grandeurs sont à la fois.

COROLLAIRE III.

Supposé que *B C* soient à la fois & que *B C* epuisent *A*. *A I* forment une suite simultanée *par Theor. 14.* *A B C* sont donc à la fois. Deux grandeurs qui sont à la fois & la grandeur qu'elles epuisent sont à la fois.

THEOREME XXIII.

De trois grandeurs, deux etant à la fois, chacune des deux est avant l'autre, si l'une des deux est avant l'autre. Soient *A B C* des grandeurs telles que *A B* soient à la fois. Si *B* est avant *C*, *A* est avant *C*.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A B* sont à la fois, *E* une des grandeurs qui forment un temps forme une suite simultanée avec *A* & une suite simultanée avec *B* & puisque *B* est avant *C*, les grandeurs *I K* qui forment une suite successive dont *I* est la premiere grandeur & *K* la seconde, sont telles que *I* forme une suite simultanée avec *B* & que *K* forme une suite simultanée avec *C*. *A B* forment une suite simultanée *par Theor. 11.* & par la même raison *A I* forment une suite simultanée. *A* formant une suite

ſuite ſimultanée avec *I* & *C* formant une ſuite ſimultanée avec *K*, *A* eſt donc avant *C*.

THEOREME XXIV.

De trois grandeurs, deux etant à la fois, chacune des deux eſt après l'autre, ſi l'une des deux eſt après l'autre. Soient *A B C* des grandeurs telles que *B C* ſoient à la fois. Si *A* eſt avant *B*, *A* eſt avant *C*.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *B C* ſont à la fois, *I* une des grandeurs qui forment un temps forme une ſuite ſimultanée avec *B* & une ſuite ſimultanée avec *C* & puiſque *A* eſt avant *B*, les grandeurs *E F* qui forment une ſuite ſucceſſive dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde, ſont telles que *E* forme une ſuite ſimultanée avec *A* & que *F* forme une ſuite ſimultanée avec *B*. *BC* forment une ſuite ſimultanée *par Theor. 11.* & par la même raiſon *FC* forment une ſuite ſimultanée. *A* formant une ſuite ſimultanée avec *E* & *C* formant une ſuite ſimultanée avec *F*, *A* eſt donc avant *C*.

COROLLAIRE.

Soient donc *A B O P* des grandeurs telles que *A B* ſoient à la fois & que *OP* ſoient à la fois. Si *A* eſt avant *O*, *B* eſt avant *O par Theor. 23.* & par conſequent avant *P*. De quatre grandeurs la premiere & la ſeconde etant à la fois & la troiſieme & la quatrieme etant auſſi à la fois, ſi la premiere eſt avant la troiſieme, la ſeconde eſt avant la quatrieme.

THEO-

THEOREME XXV.

De trois grandeurs, l'une etant avant celle qui eſt avant l'autre, eſt avant l'autre. Soient *ABC* des grandeurs telles que *A* ſoit avant *B*. Si *B* eſt avant *C*, *A* eſt avant *C*.

Les grandeurs *ABC* etant telles que *A* eſt avant *B*, les grandeurs *EF* qui forment une ſuite ſucceſſive dont *E* eſt la premiere grandeur & *F* la ſeconde, ſont telles que *E* forme une ſuite ſimultanée avec *A* & que *F* forme une ſuite ſimultanée avec *B* & puiſque *B* eſt avant *C*, les grandeurs *IK* qui forment une ſuite ſucceſſive dont *I* eſt la premiere grandeur & *K* la ſeconde, ſont telles que *I* forme une ſuite ſimultanée avec *B* & que *K* forme une ſuite ſimultanée avec *C*. *BK* forment une ſuite ſucceſſive dont *B* eſt la premiere grandeur & *K* la ſeconde *par Theor. 18.* & par la même raiſon *FK* forment une ſuite ſucceſſive dont *F* eſt la premiere grandeur & *K* la ſeconde. Donc *EFK* forment une ſuite dont *E* eſt la premiere grandeur, *F* la ſeconde & *K* la troiſieme *par Theor. 2.* & cette ſuite *par Theor. 15.* eſt ſucceſſive, d'où il ſuit *par Theor. 17.* que *EK* forment une ſuite ſucceſſive dont *E* eſt la premiere grandeur & *K* la ſeconde. *A* formant une ſuite ſimultanée avec *E* & *C* formant une ſuite ſimultanée avec *K*, *A* eſt donc avant *C*.

DEFINITION V.

La *fubftance* d'une grandeur en eft une mefure qui etant ou comprenant toute mefure de cette grandeur, eft telle que ni elle ni aucune de fes parties ne mefure deux differentes grandeurs qui foient à la fois & que toute grandeur qui eft dans un temps eft à la fois avec une grandeur mefurée par elle ou avec des grandeurs mefurées par des coordonnées qui l'epuifent. Une grandeur eft *changée* en une autre fi celle là eft avant celle ci & qu'elles ayent la même fubftance. Soit la grandeur *A* mefurée par une efpece *S* qui foit telle que ni *S* ni aucune partie de *S* ne mefure deux grandeurs qui foient à la fois fans etre la même & que toute grandeur qui eft dans un temps foit à la fois avec une grandeur mefurée par *S* ou avec des grandeurs mefurées par des coordonnées qui epuifent *S*. Si *A* n'a point de mefure qui ne foit la même que *S* ou que *S* ne comprenne, *S* eft la fubftance de *A*. Soient *B C* des grandeurs telles que la fubftance de *B* foit la fubftance de *C*. Si *B* eft avant *C*, *B* eft changée en *C*.

THEOREME XXVI.

Si deux grandeurs qui font dans un temps & qui ont la même fubftance ne font pas la même, l'une eft changée en l'autre. Soient *A B* des grandeurs qui foient dans un temps. Soit *S* la fubftance de *A* & de *B*. Si *A* n'eft pas *B*, l'une de ces grandeurs eft changée en l'autre.

Les

Les grandeurs *A* & *B* n'etant pas la même & *S* etant la ſubſtance de *A* & de *B*, ces deux grandeurs ne ſont pas à la fois. Puisque *A* & *B* ſont dans un temps, l'une de ces grandeurs eſt donc avant l'autre *par Theor. 21.* Suppoſons que *A* ſoit avant *B*. *A* eſt donc changée en *B*.

EXEMPLE. Deux boules d'yvoire egales & coexiſtantes, dont l'une eſt marquée A & l'autre B, ont enſemble deux fois plus de matiere que chacune d'entre elles & puisqu'elles epuiſent enſemble une grandeur double de chacune, chacune a une meſure que l'autre n'a pas. Mais quoique l'on diſe que l'on s'eſt ſervi autrefois de la boule marquée A pour connoitre les loix du mouvement, la boule A d'à preſent ne laiſſe pas de differer à quelques egards de la boule A d'autrefois. Pour exprimer donc ce qui convient aux boules marquées A & ce qui ne convient pas aux boules A et B, on ſuppoſe qu'une meſure de A eſt telle que ni cette meſure ni aucune de ſes parties ne meſure deux differentes grandeurs qui ſoient à la fois & que toute grandeur qui eſt dans un temps eſt à la fois avec une grandeur meſurée par cette meſure de A ou avec des grandeurs meſurées par des coordonnées qui epuiſent cette meſure. Enfin parce que l'on ne conſidere dans A aucune autre meſure que celle là, on deſigne par A une grandeur qui n'eſt meſurée que par des meſures qui ſont la même que celle là ou que celle là comprend. Cette meſure eſt une ſubſtance. Il ſuit de là que deux boules qui

ont la même ſubſtance ſont la même ſi elles ſont à la fois & que ſi elles ne ſont pas la même l'une eſt changée en l'autre.

THEOREME XXVII.

La partie de la ſubſtance d'une grandeur eſt la ſubſtance d'une partie de cette grandeur. Soit *S* la ſubſtance de la grandeur *A*. Soit *T* une partie de *S*. *T* eſt la ſubſtance d'une partie de *A*.

S etant la ſubſtance de la grandeur *A*, *S* meſure *A*. *T* etant une partie de *S*, *T* meſure donc *B* partie de *A*.

Soit *X* une eſpece qui meſure *B*. *X* ne compoſant point *B*, ne compoſe point *A*. Or *S* etant ou comprenant toute meſure de *A*, *SX* ne compoſent point une meſure de *A*. *S* comprend donc *X*. *S* eſt epuiſée par les coordonnées *TV*. Si *V* ne comprend ni *X* ni aucune partie de *X*, *T* eſt *X* ou comprend *X*. Si *V* comprend *X*, *V* ne comprenant aucune partie de *T*, il paroit par le 40[e] Theoreme du ſecond livre, que *TX* n'epuiſent point un Tout & que par conſequent *T* comprend *X*. Et ſi *X* eſt epuiſée par les coordonnées *YZ* telles que *T* ſoit ou comprenne *Y* & que *V* comprenne *Z*, il paroit encore par ce même Theoreme que *TZ* n'epuiſent point un Tout & que par conſequent *T* comprend *Z*, d'où il ſuit que *T* eſt ou comprend *X*.

Aucune

Aucune partie de *S* ne mesurant deux differentes grandeurs qui soient à la fois, *T* ni aucune partie de *T* ne mesure deux differentes grandeurs qui soient à la fois.

Soit *G* une grandeur qui soit dans un temps. *G* est à la fois ou avec une grandeur mesurée par *S* & par consequent *par Theor. 22. Cor. 2.* avec une grandeur mesurée par *T* ou avec des grandeurs mesurées par des coordonnées qui epuisent *S.* Or *T* est l'une de ces coordonnées ou *T* est partie de l'une d'entre elles & par consequent *par Theor. 22. Cor. 2. G* est à la fois avec une grandeur mesurée par *T* ou *T* est epuisée par des coordonnées dont chacune est l'une de celleslà ou partie de l'une d'entre elles. Chacune de ces coordonnées qui epuisent *T* mesure donc quelqu'une ou une partie de quelqu'une de ces grandeurs avec qui *G* est à la fois. *G* est donc à la fois avec des grandeurs mesurées par des coordonnées qui epuisent *T.* *T* est donc la substance de *B*.

THEOREME XXVIII.

La partie d'une grandeur qui est changée en une autre est changée en une partie de l'autre. Soit *B* une partie de la grandeur *A*. Si *A* est changée en la grandeur *O*, *B* est changée en une partie de *O*.

Les grandeurs *A O* etant telles que *A* est changée en *O*, *S* la substance de *A* est la substance de *O*. *B* etant une partie de *A*, *T* partie

 de

de *S* mesure *B* & *T* mesure aussi *P* partie de *O*. *T* est donc la substance de *B* & de *P* *par Theor.* 27.

A est avant *O* & par consequent *A* & *O* sont dans un temps, d'où il suit *par Theor.* 22. *Cor.* 1. que *A B* sont à la fois & que *O P* sont à la fois. Donc *par Theor.* 24. *Cor.* *B* est avant *P* & par consequent *B* est changée en *P*.

THEOREME XXIX.

Si les substances de deux coordonnées qui epuisent une grandeur sont des coordonnées qui epuisent une mesure de cette grandeur, cette mesure est la substance de cette grandeur. Soit la grandeur *A* epuisée par les coordonnées *B C*. Soit *S* la substance de *B*, *T* la substance de *C*, *R* une mesure de *A*. Si *S T* sont des coordonnées qui epuisent *R*, *R* est la substance de *A*.

La grandeur *A* etant epuisée par les coordonnées *B C*, toute mesure de *A* est epuisée par deux coordonnées dont l'une mesure *B* & l'autre mesure *C*. Or *S* etant la substance de *B*, toute mesure de *B* est *S* ou est comprise par *S* & *T* etant la substance de *C*, toute mesure de *C* est *T* ou est comprise par *T*. *S T* etant des coordonnées qui epuisent *R* mesure de *A*, il paroit donc que toute mesure de *A* est *R* ou est comprise par *R*.

Soient *L O* deux grandeurs qui soient à la fois & qui soient mesurées par *R*. *L* est epuisée

par

par les coordonnées *MN* telles que *S* mesure *M* & que *T* mesure *N*. *O* est aussi epuisée par les coordonnées *P Q* telles que *S* mesure *P* & que *T* mesure *Q*. *LO* etant à la fois, il s'ensuit *par Theor. 22. Cor. 2.* que *MO* & par consequent *MP* sont à la fois. *M* est donc la même que *P*. *NO* & par consequent *NQ* sont aussi à la fois. *N* est donc la même que *Q* & par consequent *L* est la même que *O*.

Soit Z une partie de *R*. Si *Z* est l'une des coordonnées *ST* ou partie de l'une d'entre elles, *Z* ne mesure pas deux differentes grandeurs qui soient à la fois *par Theor. 27.* & si *Z* est epuisée par deux coordonnées dont l'une soit partie de *S* & l'autre soit *T* ou partie de *T*, ce que l'on vient de prouver fait aussi voir que *Z* ne mesure pas deux grandeurs qui soient à la fois sans etre la même.

Soit *G* une grandeur qui soit dans un temps. *G* est à la fois avec une grandeur mesurée par *S* ou avec des grandeurs mesurées par des coordonnées qui epuisent *S*. *G* est aussi à la fois avec une grandeur mesurée par *T* ou avec des grandeurs mesurées par des coordonnées qui epuisent *T*. Par consequent *G* est à la fois avec des grandeurs mesurées par des coordonnées qui epuisent *R*. *R* est donc la substance de *A*.

THEOREME XXX.

Les substances de deux coordonnées qui epuisent une grandeur sont des coordonnées qui epuisent

ſent la ſubſtance de cette grandeur. Soit la grand ur *A* epuiſée par les coordonnées *BC*. Si *R* eſt la ſubſtance de *B* & *S* la ſubſtance de *C*, *R S* ſont des coordonnées qui epuiſent *Q* ſubſtance de *A*.

La grandeur *A* etant epuiſée par les coordonnées *B C*, *A* eſt meſurée par une eſpece *V* qui eſt epuiſée par les coordonnées *X Y* telles que *X* meſure *B* & que *Y* meſure *C*. *B* ne comprend ni *Y* ni aucune partie de *Y*. *S* etant la ſubſtance de *C*, *B* ne comprend donc pas *S* qui eſt ou comprend *Y*. Soit *T* une partie de *S*. *T* meſure *D* partie de *C* & chaque partie de *S* qui eſt coordonnée à *T* meſure une partie de *C* qui eſt coordonnée à *D*. *D* eſt auſſi meſurée par *Z* partie de *Y* & aucune partie de *Z* n'eſt compriſe par une partie de *C* qui ſoit coordonnée à *D*. Puiſque *S* eſt *Y* ou comprend *Y*, *T* eſt donc ou comprend *Z*. *B* qui ne comprend pas *Z* ne comprend donc pas *T*. *R* etant la ſubſtance de *B*, on prouvera de même que *C* ne comprend ni *R* ni aucune partie de *R*.

R n'eſt donc pas *S* & ne comprend pas *S* & n'eſt pas compriſe par *S*. *R S* qui ſont compriſes par *A* epuiſent donc un Tout *Q*. *R* ne compoſant point *B* ne compoſe point *A*. *A* n'eſt donc pas *Q* & par conſequent *A* comprend *Q* & puiſque *R* ne compoſe point *A* & que *S* qui ne compoſe point *C* ne compoſe point *A*, *Q* ne compoſe point *A*.

Soit

Soit *E* une partie de *A*. Si *E* eſt *B*, *E* ne comprenant point *S*, ne comprend point *Q*. Si *B* & une partie de *C* epuiſent *E*, *B* ne comprenant aucune partie de *S*, *E* ne comprend point *Q* & par conſequent ſi une partie de *B* & une partie de *C* epuiſent *E*, *E* ne comprend point *Q*. Donc aucune partie de *A* ne comprend *Q* & par conſequent *Q* meſure *A*.

R ne comprenant aucune partie de *S* & *S* ne comprenant aucune partie de *R*, *R S* ſont des parties de *Q* & des parties coordonnées. Donc *par Theor. 29.* *Q* eſt la ſubſtance de *A*.

THEOREME XXXI.

De ſix grandeurs la ſeconde & la troiſieme qui ſont à la fois etant des coordonnées qui epuiſent la premiere & la cinquieme & la ſixieme qui ſont à la fois etant des coordonnées qui epuiſent la quatrieme : ſi la ſeconde eſt changée en la cinquieme & que la troiſieme ſoit changée en la ſixieme, la premiere eſt changée en la quatrieme. Soient *A B C*, *O P Q* des grandeurs telles que *B C* qui ſont à la fois ſoient des coordonnées qui epuiſent *A* & que *P Q* qui ſont à la fois ſoient des coordonnées qui epuiſent *O*. Si *B* eſt changée en *P* & que *C* ſoit changée en *Q*, *A* eſt changée en *O*.

Les grandeurs *ABC*, *OPQ* etant telles que *B* eſt changée en *P* & que *C* eſt changée en *Q*, *S* la ſubſtance de *B* eſt la ſubſtance de *P* & *B* eſt

avant *P*, *T* la ſubſtance de *C* eſt la ſubſtance de *Q*. Puisque *B C* ſont des coordonnées qui epuiſent *A*, *S T* ſont des coordonnées qui epuiſent *R* la ſubſtance de *A* *par Theor. 30.* & puisque *P Q* ſont des coordonnées qui epuiſent *O*, *R* eſt auſſi la ſubſtance de *O*.

Or *B C* etant à la fois, *A B* ſont à la fois *par Theor. 22. Cor. 3.* & *P Q* etant à la fois *O P* ſont à la fois. *B* etant avant *P*, *A* eſt donc avant *O* *par Theor. 24. Cor.* & par conſequent *A* eſt changée en *O*.

THEOREME XXXII.

De trois grandeurs celle qui eſt changée en celle qui eſt changée en l'autre eſt changée en l'autre. Soient *A B C* des grandeurs telles que *A* ſoit changée en *B*. Si *B* eſt changée en *C*, *A* eſt changée en *C*.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A* eſt changée en *B*, *S* ſubſtance de *A* eſt ſubſtance de *B*. *B* etant changée en *C*, *T* ſubſtance de *B* eſt ſubſtance de *C*. Or *S* qui eſt ſubſtance *B* eſt ou comprend *T* qui meſure *B*. Mais *T* qui eſt ſubſtance de *B* n'eſt pas compriſe par *S* qui meſure *B*. *S* eſt donc *T* & par conſequent *S* la ſubſtance de *A* eſt la ſubſtance de *C*.

A etant changée en *B* & *B* etant changée en *C*, *A* eſt avant *B* & *B* eſt avant *C*. *A* eſt donc avant *C* *par Theor. 25.* & par conſequent *A* eſt changée en *C*.

THEO-

THEOREME XXXIII.

Si deux differentes grandeurs ſont changées en une troiſieme, l'une eſt changée en l'autre. Soient *A B C* des grandeurs telles que *A* ſoit changée en *C* & que *B* ſoit changée en *C*. Si *A* n'eſt pas *B*, l'une de ces grandeurs eſt changée en l'autre.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A* eſt changée en *C*, *S* ſubſtance de *A* eſt ſubſtance de *C*. *B* etant changée en *C*, *T* ſubſtance de *B* eſt ſubſtance de *C*. *S* & *T* etant ſubſtance de *C*, *S* eſt donc *T* & par conſequent *S* la ſubſtance de *A* eſt la ſubſtance de *B*.

A etant changée en *C* & *B* etant changée en *C*, *A* & *B* ſont avant *C*. Or *A* & *B* n'etant pas la même & ayant la même ſubſtance, ces deux grandeurs ne ſont pas à la fois. *A* eſt donc avant ou après *B* *par Theor. 21. Cor.* & par conſequent l'une de ces grandeurs eſt changée en l'autre.

THEOREME XXXIV.

Si une grandeur eſt changée en deux differentes grandeurs, l'une de celles ci eſt changée en l'autre. Soient *A B C* des grandeurs telles que *A* ſoit changée en *B* & que *A* ſoit changée en *C*. Si *B* n'eſt pas *C*, l'une de ces grandeurs eſt changée en l'autre.

Les grandeurs *A B C* etant telles que *A* eſt changée en *B*, *S* ſubſtance de *A* eſt ſubſtance

 de

de *B*, *A* etant changée en *C*, *T* ſubſtance de *A* eſt ſubſtance de *C*. *S* & *T* etant ſubſtance de *A*, *S* eſt donc *T* & par conſequent *S* la ſubſtance de *B* eſt la ſubſtance de *C*.

A etant changée en *B* & en *C*, *A* eſt avant *B* & avant *C*. Or *B* & *C* n'etant pas la même & ayant la même ſubſtance, ces deux grandeurs ne ſont pas à la fois. *B* eſt donc avant ou après *C par Theor. 21. Cor.* & par conſequent l'une de ces grandeurs eſt changée en l'autre.

SCHOLIE.

Soient *E F G H I K* des grandeurs qui forment un temps dont *E* ſoit la premiere grandeur, *F* la ſeconde &c. & telles que *E* ne ſoit pas la premiere grandeur d'une ſuite ſucceſſive dont *F* ſoit la troiſieme & que *I* ne ſoit pas la premiere grandeur d'une ſuite ſucceſſive dont *K* ſoit la troiſieme. Soient *M N O P* des grandeurs qui ayent la même ſubſtance & telles que *M* forme une ſuite ſimultanée avec *F*, *N* avec *G*, *O* avec *H*, *P* avec *I*. *M G* forment une ſuite ſucceſſive *par Theor. 16 & 18.* & puiſque *N G* forment une ſuite ſimultanée, *M* n'eſt pas *N*. On voit donc auſſi qu'aucune des grandeurs *M N O P* n'eſt l'une des autres. Mais ſuppoſé que *F G H I* epuiſent un Tout *D* & que l'on conſidere un ſujet *A* comme etant le même que chacune des grandeurs *M N O P*. *D* eſt la *durée* de *A*, *F* eſt le *commencement* de *A*, *I* la *fin* de *A*.

Soient

Soient *F G H I* des grandeurs qui forment un temps dont *F* ſoit la premiere grandeur, *G* la ſeconde &c. Soient *M N O P* des grandeurs qui ayent la même ſubſtance & telles que *M* forme une ſuite ſimultanée avec *F*, *N* avec *G*, *O* avec *H*, *P* avec *I*. Soit *A* un ſujet que l'on conſidere comme etant le même que chacune des grandeurs *M N O P*. Soient *R S* des grandeurs telles que *R* forme une ſuite ſimultanée avec *G* & *S* avec *H*. Soit *B* un ſujet que l'on conſidere comme etant le même que chacune des grandeurs *R S*. On dit que *A* eſt *avant & après B*.

Soient *M N O* &c. des grandeurs qui forment un lieu. Soit *n* une grandeur qui ayant la même ſubſtance que *N*, ſoit conſiderée comme etant *N*. Suppoſé que *M* ſoit à de certaines diſtances des plans infinis *A B C* qui n'ayent qu'un point commun & que chacune des grandeurs *N O* &c. ſoit auſſi à de certaines diſtances des plans *A B C*. Si *n* eſt aux mêmes diſtances des plans *A B C* que *M*, on dit que *M* a *dans un temps* la place que *N* a dans un autre temps.

DEFINITION VI.

Quatre grandeurs etant telles que la premiere eſt changée en la ſeconde & que ſi la premiere eſt changée en la ſeconde, la troiſieme eſt changée en la quatrieme qui eſt après la ſeconde, le changement de la premiere eſt une *action* & le changement de la troiſieme eſt un *effet* de cette action. La *force* de l'action eſt un produit de

la

la quatrieme, egal à une grandeur qui comprend la quatrieme, & tel qu'aucun produit de la troisieme ne comprend la troisieme, sans qu'une grandeur qui comprenne la quatrieme soit epuisée par deux coordonnées egales à ces deux produits. La grandeur qui en multipliant la quatrieme donne ce produit est l'*increment* de la force. Soient *ABCD* des grandeurs telles que *A* soit changée en *B* & que si *A* est changée en *B*, *C* est changée en *D* & *D* est après *B*. Le changement de *A* en *B* est une action & le changement de *C* en *D* est un effet de cette action. Soit *Z* une grandeur qui etant un produit de *D* multipliée par une grandeur *V*, soit egale à une grandeur qui comprenne *D*. Si aucune grandeur *Y* etant un produit de *C* ne comprend *C* sans qu'une grandeur qui comprenne *D* soit epuisée par deux coordonnées dont l'une soit egale à *Y* & l'autre à *Z*, *Z* est la force de cette action de *A*, *V* est l'increment de *Z*.

THEOREME XXXV.

Six grandeurs etant telles que le changement de la premiere en la seconde est une action dont l'effet est le changement de la quatrieme en la cinquieme & que le changement de la seconde en la troisieme est une action dont l'effet est le changement de la cinquieme en la sixieme: le changement de la premiere en la troisieme est une action dont l'effet est le changement de la quatrieme en la sixieme & la force de cette action est la somme

de deux grandeurs egales aux forces des deux autres actions. Soient *ABC*, *OPQ* des grandeurs telles que le changement de *A* en *B* ſoit une action dont l'effet ſoit le changement de *O* en *P* & que le changement de *B* en *C* ſoit une action dont l'effet ſoit le changement de *P* en *Q*. Le changement de *A* en *C* eſt une action dont l'effet eſt le changement de *O* en *Q*. Soit *Y* la force de l'action de *A* changée en *B*. Soit *Z* la force de l'action de *B* changée en *C*. Une grandeur *X* epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt egale à *Y* & l'autre à *Z* eſt la force de l'action de *A* changée en *C*.

Les grandeurs *ABC*, *OPQ* etant telles que le changement de *A* en *B* eſt une action dont l'effet eſt le changement de *O* en *P*, *A* eſt changée en *B* & ſi *A* eſt changée en *B*, *O* eſt changée en *P*. Le changement de *B* en *C* etant une action dont l'effet eſt le changement de *P* en *Q*, *B* eſt changée en *C* & ſi *B* eſt changée en *C*, *P* eſt changée en *Q* qui eſt aprés *C*. *A* eſt donc changée en *C par Theor. 32.*

Or puiſque l'on ne ſait que *A* eſt changée en *C* que parceque l'on connoit que *A* eſt changée en *B* & que *B* eſt changée en *C*, il eſt evident que ſi *A* eſt changée en *C*, *A* eſt changée en *B* & *B* eſt changée en *C* & par conſequent ſi *A* eſt changée en *C*, *O* eſt changée en *P* & *P* eſt changée en *Q*, d'où il ſuit *par Theor. 32.* que ſi *A* eſt changée en *C*, *O* eſt changée en *Q*.

Le

Le changement de A en C eſt donc une action dont l'effet eſt le changement de O en Q.

Y etant la force de l'action de A changée en B, Y eſt un produit de P & Y eſt egale à une grandeur qui comprend P & qui par le premier Corollaire du Theoreme 166 du livre ſecond eſt auſſi un produit de P. Z etant la force de l'action de B, une grandeur X qui comprend Q eſt donc epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt egale à Y & l'autre à Z. Z eſt un produit de Q & Y eſt auſſi un produit de Q. Ces deux coordonnées qui epuiſent X ſont donc auſſi des produits de Q, d'où il ſuit par le Theoreme 137 du livre ſecond que X eſt un produit de Q.

Soit Ω une grandeur qui comprenne O & qui ſoit un produit de O. Une grandeur Ψ qui comprend P eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt egale à Ω & l'autre à Y. Ω etant un produit de P, Ψ eſt donc auſſi un produit de P & Ψ comprenant P, une grandeur Φ qui comprend Q eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt egale à Ψ & l'autre à Z. Φ eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt egale à Ω & l'autre eſt egale à X. X eſt donc la force de l'action de A changée en C.

EXEMPLE. Suppoſé que par le moyen d'une corde qui paſſe ſur des poulies l'on eleve un poids à differentes hauteurs. La grandeur qui tire la corde eſt changée par le mouvement en

en une ſeconde grandeur & celle ci en une troiſieme. Le poids qui etoit ſur le terrain eſt auſſi changé en un poids placé à une certaine diſtance du premier & celui ci eſt changée en un poids placé à une certaine diſtance du ſecond & à une plus grande diſtance du premier. Le changement de la premiere grandeur en la ſeconde eſt une action dont l'effet eſt le premier changement du poids & l'effet de la ſeconde action eſt le ſecond changement du poids, d'où il ſuit que le changement de la premiere grandeur en la troiſieme eſt une action dont l'effet eſt le changement du premier poids au troiſieme. Le produit du poids multiplié par la premiere hauteur eſt la force de la premiere action. Le produit du poids multiplié par la ſeconde hauteur eſt la force de la ſeconde action. Le produit du poids multiplié par la ſomme de la premiere & de la ſeconde hauteur eſt la force de la troiſieme action.

COROLLAIRE.

Si les changemens de deux grandeurs ſont deux actions & que la force de chacune de ces actions reſulte tellement de ces deux grandeurs que la ſomme de ces deux grandeurs ſoit à la force de l'une de ces actions ce que la ſomme de ces mêmes grandeurs eſt à la force de l'autre action, il paroit par les Theoremes 132 & 133 du ſecond livre que ces deux forces ſont egales.

SCHO-

SCHOLIE.

Soit A un Corps qui ſe meuve avec la viteſſe a. Soit B un Corps qui s'avance du même côté avec la viteſſe b. (Si B avoit une direction contraire à celle de A, b deviendroit $-b$ & ſi B etoit en repos, b ſeroit $= 0$.) Suppoſons que A atteigne & pouſſe B. Le corps A etant en mouvement eſt changé au corps A choquant B. Ce changement eſt une action dont l'effet eſt que le corps B ſe mouvant avec la viteſſe b eſt changé au corps B ſe mouvant avec une viteſſe β plus grande que b. $B \times b$ eſt donc une partie de la grandeur $B \times \beta$ & puiſque $B \times b$ eſt tout le produit de B avant le choc, la force de cette action ſera $B \times \overline{\beta - b}$. Le corps B etant en mouvement eſt changé au corps B choqué par A. Ce changement eſt une action dont l'effet eſt que le corps A n'ayant que la lenteur que lui laiſſe la viteſſe a eſt changé au corps A ayant toute la lenteur que lui laiſſe la viteſſe α moindre que a. $A \times \overline{l-a}$ exprime le produit de A multiplié par la lenteur que a laiſſe au corps A & $A \times \overline{l-\alpha}$ exprime le produit de A multiplié par la lenteur que α laiſſe au corps A. $A \times \overline{l-a}$ eſt donc une partie de $A \times \overline{l-\alpha}$ & puiſque $A \times \overline{l-a}$ eſt tout le produit de A avant le choc, la force de cette action ſera $A \times \overline{a-\alpha}$.

Or

Or par le Corollaire ces deux forces, dont l'une eſt une acceleration & l'autre un retardement, ſont egales. On a donc $A \times \overline{a - \alpha} = B \times \overline{\beta - b}$. Si *A* & *B* ſont des corps durs, le corps *A* pouſſe le corps *B* jusqu'a ce qu'ils ayent une viteſſe commune, ce qui fait $\beta = \alpha$. Mais ſi *A* & *B* ſont des Corps elaſtiques, ces deux Corps ſe comprimant l'un l'autre prennent en ſe ſéparant la même viteſſe reſpective qu'ils ont eue avant le choc, ce qui fait $a - b = \beta - \alpha$ & par conſequent $\beta = \alpha + a - b$. Que ſi l'on ſubſtitue dans la premiere equation l'une ou l'autre de ces valeurs de β, on exprimera en grandeurs connues les valeurs de α & de β, ſoit que *A* & *B* ſoient des corps durs ou des corps elaſtiques.

THEOREME XXXVI.

Douze grandeurs etant telles que le changement de la premiere en la ſeconde eſt une action dont l'effet eſt le changement de la troiſieme en la quatrieme, que le changement de la cinquieme en la ſixieme eſt une action dont l'effet eſt le changement de la ſeptieme en la huitieme, que le changement de la neuvieme en la dixieme eſt une action dont l'effet eſt le changement de la onzieme en la douzieme & que la quatrieme eſt la ſomme de deux grandeurs egales à la huitieme & à la douzieme: ſi les forces de ces trois actions ont le même increment, la force de la premiere action eſt la

 ſomme

somme de deux grandeurs egales aux forces des deux autres actions. Soient $ADOR$, $BEPS$, $CFQT$ des grandeurs telles que le changement de A en D soit une action dont l'effet soit le changement de O en R, que le changement de B en E soit une action dont l'effet soit le changement de P en S, que le changement de C en F soit une action dont l'effet soit le changement de Q en T & que R soit epuisée par deux coordonnées dont l'une soit egale à S & l'autre à T. Soit X la force de l'action de A, Y la force de l'action de B, Z la force de l'action de C. Si V est l'increment de ces trois forces, X est epuisée par deux coordonnées dont l'une est egale à Y & l'autre à Z.

Les grandeurs $ADOR$, $BEPS$, $CFQT$ etant telles que le changement de A en D est une action dont l'effet est le changement de O en R & X etant la force de cette action & V l'increment de cette force, X est le produit de R multipliée par V. R etant epuisée par les coordonnées st telles que s est egale à S & que t est egale à T, il paroit donc par le Theoreme 138 du livre second que X est epuisée par les coordonnées yz telles que y est le produit de s multipliée par V & que z est le produit de t multipliée par V.

Or le changement de B en E etant une action dont l'effet est le changement de P en S & Y etant la force de cette action & V l'increment

crement de cette force, *Y* eſt le produit de *S* multipliée par *V* & le changement de *C* en *F* etant une action dont l'effet eſt le changement de *Q* en *T* & *Z* etant la force de cette action & *V* l'increment de cette force, *Z* eſt le produit de *T* multipliée par *V*. *Y* eſt donc egale à *y* par le Theoreme 166 du livre ſecond & *Z* eſt egale à *z*.

THEOREME XXXVII.

Les forces dont les incremens ſont entre eux reciproquement comme les grandeurs changées, ſont egales. Soit *Y* la force d'une action dont l'effet ſoit un changement de la grandeur *O*. Soit *Z* la force d'une action dont l'effet ſoit un changement de la grandeur *P*. Soit *T* l'increment de *Y*, *V* l'increment de *Z*. Si *T* eſt à *V* ce que *P* eſt à *O*, *Y* eſt egale à *Z*.

Y etant la force d'une action dont l'effet eſt le changement de la grandeur *O* en une grandeur *R* & *T* etant l'increment de *Y*, *Y* eſt le produit de *R* multipliée par *T*. *O* etant egale à *R*, *Y* eſt donc auſſi le produit de *O* multipliée par *T*. *Z* etant la force d'une action dont l'effet eſt un changement de la grandeur *P* & *V* etant l'increment de *Z*, *Z* eſt le produit de *P* multipliée par *V*.

T etant à *V* ce que *P* eſt à *O*, il s'enſuit donc par le Theoreme 142 du livre ſecond, que *Y* eſt egale à *Z*.

COROLLAIRE.

On voit auſſi par le Theoreme 139 du livre ſecond & le premier Corollaire de ce Theoreme, que ſi les grandeurs changées ſont egales, les forces ſont entre elles comme les incremens & que les forces dont les incremens ſont egaux, ſont entre elles comme les grandeurs changées.

SCHOLIE.

Par le Theoreme que l'on vient de demontrer, une action dont l'effet eſt de transporter un poids de cent livres d'une place à une autre qui en eſt eloignée d'un pas & une action dont l'effet eſt de transporter le poids d'une livre d'une place à une autre qui en eſt eloignée de cent pas, ce ſont deux actions qui ont la même force.

Soient *A a B c O P* des grandeurs telles que *A a* ſoient à la fois, que *B* ſoit avant *c*, que le changement de *A* en *B* ſoit une action dont l'effet ſoit le changement de *O* en *P* & que le changement de *a* en *c* ſoit une action dont l'effet ſoit auſſi le changement de *O* en *P*. Si *X* eſt la force de l'action de *A*, *X* eſt auſſi la force de l'action de *a*. La ſeule difference qu'il y ait, c'eſt que les coordonnées *Y Z* &c. qui epuiſent *X* ſont dans le premier cas les produits de pluſieurs grandeurs ſimultanées qui epuiſent *P* ſelon le Theoreme 36 & dans le ſecond les produits de pluſieurs grandeurs ſucceſſives

ſives qui ſont egales à *P* ſelon le Theoreme 35. Deux actions qui ont le même effet ont la même force, quoique l'une dure plus que l'autre. L'action qui employe une heure à elever un Cric appliqué à une maſſe, a la même force qu'une action qui eleveroit cette maſſe à la même hauteur dans un moment & cette force eſt la ſomme de pluſieurs forces ſucceſſives dans le premier cas & de pluſieurs forces ſimultanées dans le ſecond.

Suppoſé un Mobile dans un milieu uniforme qui le retarde ſucceſſivement. Il paroit par la Theorie de Galilée que l'eſpace que ce mobile parcourt, entant qu'il reſulte de la viteſſe initiale du mobile, eſt en raiſon du quarré de la viteſſe. Or le mobile ne parcourt cet eſpace qu'en deplaçant une matiere qui eſt d'autant plus grande ou transportée d'autant plus loin que le mobile parcourt un plus long eſpace: de ſorte que la matiere *P* etant transportée à la diſtance *p*, le deplacement $P \times p$ ſera auſſi en raiſon du quarré de la viteſſe du mobile. Ainſi la force de l'action d'un mobile, qui deplace une matiere uniforme en parcourant un eſpace, eſt en raiſon du quarré de la viteſſe de ce mobile.

THEOREME XXXVIII.

Si une grandeur eſt changée en une autre & que le changement d'une partie de la premiere en une partie de la ſeconde ſoit une action

dont l'effet soit le changement d'une troisieme grandeur en une autre, le changement de la premiere en la seconde est une action dont l'effet est le changement de la troisieme en la quatrieme. Soient *A B*, *D E*, *P S* des grandeurs telles que *B* soit partie de *A*, que *E* soit partie de *D* & que *A* soit changée en *D*. Si le changement de *B* en *E* est une action dont l'effet soit le changement de *P* en *S*, le changement de *A* en *D* est une action dont l'effet est le changement de *P* en *S*.

Les grandeurs *A B*, *D E*, *P S* etant telles que le changement de *B* en *E* est une action dont l'effet est le changement de *P* en *S*: si *B* est changée en *E*, *P* est changée en *S*. Or *B* etant partie de *A*, si *A* est changée en *D*, *B* est changée en une partie de *D* *par Theor. 28.* & puisque *par Theor. 22. Cor. 1.* *D* & toute partie de *D* sont à la fois, il s'ensuit *par Theor. 22.* que *E* partie de *D* & cette autre partie de *D* en qui *B* est changée si *A* est changée en *D*, sont à la fois & puisque *E* & cette autre partie de *D* ont la substance de *B*, il s'ensuit que si *A* est changée en *D*, *B* est changée en *E* & par consequent si *A* est changée en *D*, *P* est changée en *S*. *E* etant avant *S*, *D* est avant *S* *par Theor. 23.* *A* etant changée en *D*, ce changement est donc une action dont l'effet est le changement de *P* en *S*.

THEOREME XXXIX.

Six grandeurs etant telles que le changement de la premiere en la seconde est une action dont l'effet est le changement de la troisieme en la quatrieme & que le changement de la troisieme en la quatrieme est une action dont l'effet est le changement de la cinquieme en la sixieme, le changement de la premiere en la seconde est une action dont l'effet est le changement de la cinquieme en la sixieme. Soient *A B*, *I K*, *O P* des grandeurs telles que le changement de *A* en *B* soit une action dont l'effet soit le changement de *I* en *K* & que le changement de *I* en *K* soit une action dont l'effet soit le changement de *O* en *P*. Le changement de *A* en *B* est une action dont l'effet est le changement de *O* en *P*.

Les grandeurs *A B*, *I K*, *O P* etant telles que le changement de *A* en *B* est une action dont l'effet est le changement de *I* en *K*, *A* est changée en *B* & si *A* est changée en *B*, *I* est changée en *K*. Le changement de *I* en *K* etant une action dont l'effet est le changement de *O* en *P*, si *I* est changée en *K*, *O* est changée en *P*. Donc si *A* est changée en *B*, *O* est changée en *P*. *B* etant avant *K* & *K* etant avant *P*, *B* est avant *P* *par Theor. 25.* Le changement de *A* en *B* est donc une action dont l'effet est le changement de *O* en *P*.

DEFINITION VII.

Trois grandeurs etant telles que la ſeconde n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui elle eſt changée ſi elle eſt changée en la premiere, ſans que le changement de la ſeconde en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de la troiſieme dont la force ſoit plus grande que la force de toute action de la troiſieme : la ſeconde *reſiſte* à la troiſieme ou *reſiſte* à etre changée en la premiere par la troiſieme. Soient *A B O* des grandeurs telles que *B* ne ſoit changée en aucune des grandeurs en qui *B* eſt changée ſi elle eſt changée en *A*, ſans que le changement de *B* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *O* qui ait la force *X*. Si aucune action de *O* n'a une force qui ne ſoit moindre que *X*, *B* reſiſte à *O* ou à etre changée en *A* par *O*.

THEOREME XL.

Cinq grandeurs etant telles que la force d'une action qui change la premiere & la force d'une action qui change la ſeconde, laquelle eſt moindre que la premiere, ont le même increment & que la quatrieme n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui elle eſt changée ſi elle eſt changée en la troiſieme, ſans que le changement de la quatrieme en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de la cinquieme qui ait la force de la premiere action : ſi toute force d'une action de la cinquieme eſt la force de la ſeconde action ou partie

partie de celle là, la quatrieme grandeur resiſte à la cinquieme. Soient *A B*, *G H I* des grandeurs telles que *B* ſoit moindre que *A* & que *X* etant la force d'une action dont l'effet eſt un changement de *A* & *Y* etant la force d'une action dont l'effet eſt un changement de *B*, *V* ſoit l'increment de ces deux forces. Suppoſé que *H* ne ſoit changée en aucune des grandeurs en qui *H* eſt changée ſi elle eſt changée en *G*, ſans que le changement de *H* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *I* qui ait la force *X*. Si aucune action de *I* n'a une force qui ne ſoit *Y* ou partie de *Y*, *H* reſiſte à *I*.

Les grandeurs *A B*, *G H I* etant telles que *X* eſt la force d'une action dont l'effet eſt un changement de *A*, que *Y* eſt la force d'une action dont l'effet eſt un changement de *B* & que *V* eſt l'increment de ces deux forces, *X* eſt le produit de *A* multipliée par *V* & *Y* eſt le produit de *B* multipliée par *V*. *B* etant moindre que *A*, *Y* eſt donc moindre que *X* *par Theor. 166. Cor. 3.* du livre ſecond.

Aucune action de *I* n'ayant une force qui ne ſoit *Y* ou partie de *Y*, la force de toute action de *I* eſt donc moindre que *X* & puiſque *H* n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui *H* eſt changée ſi elle eſt changée en *G*, ſans que le changement de *H* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *I* qui ait la force *X*, *H* reſiſte à *I*.

EXEMPLES. On voit que si un Corps changeoit de place, ce changement seroit l'effet de la detente d'un ressort qui le touche & cette detente auroit la même force que celle d'un autre ressort, lequel s'il etoit placé comme celui là, se detendroit effectivement & pousseroit le corps. Mais le premier ressort etant moins long, moins large ou moins compacte que le second, la detente du premier a moins de force que celle du second. C'est pour cela que le corps resiste à etre deplacé par le premier. Ainsi un filet de chanvre qui ne tiendroit pas suspendu un poids de quarante livres resiste à un poids de trente livres. Une planche resiste à un poids parce qu'un poids qui descendroit en rompant la planche seroit plus pesant que celui là. Tel corps qui n'est point dissous par un feu, le seroit par un feu continué ou plus grand que celui là.

THEOREME XLI.

Quatre grandeurs etant telles que la seconde n'est changée en aucune des grandeurs en qui elle est changée si elle est changée en la premiere, sans que le changement de la seconde en cette grandeur soit l'effet d'une action de la troisieme dont la force soit plus grande que celle de toute action de la seconde & que la troisieme n'est changée en aucune des grandeurs en qui elle est changée si elle est changée en la quatrieme, sans que

que le changement de la troisieme en cette grandeur soit l'effet d'une action de la seconde dont la force soit plus grande que celle de toute action de la troisieme : si la force de toute action de la troisieme est la force d'une action de la seconde & que la force de toute action de la seconde soit la force d'une action de la troisieme, la seconde resiste à la troisieme & la troisieme resiste à la seconde. Soient *AB*, *PO* des grandeurs telles que *B* ne soit changée en aucune des grandeurs en qui *B* est changée si elle est changée en *A*, sans que le changement de *B* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *P* dont la force *Y* soit plus grande que la force de toute action de *B* & que *P* ne soit changée en aucune des grandeurs en qui *P* est changée si elle est changée en *O*, sans que le changement de *P* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *B* dont la force *Z* soit plus grande que la force de toute action de *P*. Si la force de toute action de *P* est la force d'une action de *B* & que la force de toute action de *B* soit la force d'une action de *P*, *B* resiste à *P* & *P* resiste à *B*.

Les grandeurs *AB*, *PO* etant telles que *B* n'est changée en aucune des grandeurs en qui *B* est changée si elle est changée en *A*, sans que le changement de *B* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *P* dont la force *Y* est plus grande

de que la force de toute action de *B* : puisque la force de toute action de *P* est la force d'une action de *B*, la force de toute action de *P* est donc moindre que *Y* & par consequent *B* resiste à *P*.

P n'etant changée en aucune des grandeurs en qui *P* est changée si elle est changée en *O* sans que le changement de *P* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *B* dont la force *Z* est plus grande que la force de toute action de *P* : puisque la force de toute action de *B* est la force d'une action de *P*, la force de toute action de *B* est donc moindre que *Z* & par consequent *P* resiste à *B*.

COROLLAIRE.

Comme tout changement de *B* en une des grandeurs en qui *B* est changée si elle est changée en *A*, suppose une action de *P* qui ait une force *Y* plus grande que la force de toute action de *B* & de toute action de *P* & que tout changement de *P* en une des grandeurs en qui *P* est changée si elle changée en *O* suppose une action de *B* qui ait une force *Z* plus grande que la force de toute action de *P* & de toute action de *B*, *Y* est la même que *Z*. Si deux grandeurs se resistent reciproquement parce que toute action de celle qui ne resisteroit pas auroit moins de force qu'une action de l'autre, la force que le changement de l'une supposeroit dans une action

action de l'autre eſt la force que le changement de celle ci ſuppoſeroit dans une action de celle là.

SCHOLIE.

Les deux grandeurs *B* & *P* repreſentent deux lutteurs. Si le lutteur *B* ſe mouvoit vers *A*, ce changement de *B* ſeroit l'effet d'une action de *P* qui auroit plus de force que toute action de *B*. Si le lutteur *P* ſe mouvoit vers *O*, ce changement de *P* ſeroit l'effet d'une action de *B* qui auroit plus de force que toute action de *P*. Mais ſi aucune action de l'un n'a une force qui ne ſoit la force d'une action de l'autre, *B* reſiſte à *P* & *P* reſiſte à *B*.

Les deux grandeurs *B* & *P* repreſentent auſſi deux poids attachés aux extremitez d'un levier. Si *B* montoit, ce changement de *B* ſeroit l'effet d'une action de *P*, qui auroit plus de force que toute action de *B*. Si *P* montoit, ce changement de *P* ſeroit l'effet d'une action de *B*, qui auroit plus de force que toute action de *P*. Donc, ſi tout ce que l'un de ces Corps fait monter, l'autre le fait monter auſſi & qu'aucune action de l'un n'ait une force qui ne ſoit la force d'une action de l'autre, *B* reſiſte à etre elevé par *P* & *P* reſiſte à etre elevé par *B*.

Si *B* etoit elevé par *P*, *B* auroit la viteſſe *b* & $B \times b$ ſeroit la force de l'action de *P*. Si *P* etoit elevé par *B*, *P* auroit la viteſſe *p* & $P \times p$

$P \times p$ feroit la force de l'action de B. Or par le Corollaire $B \times b = P \times p$ & par confequent $B . P :: p . b$. Les viteffes font entre elles comme les efpaces parcourus dans un même temps. Or B & P parcourent dans un même temps des arcs femblables, lesquels font entre eux comme les rayons. B eft donc à P ce que la diftance de P du point d'appui eft à la diftance de B du même point.

Suppofons que deux Cylindres inegaux etant elevés perpendiculairement fur un tuyau horizontal par lequel ils fe communiquent, l'eau B contenue dans le premier Cylindre foit en equilibre avec l'eau P contenue dans l'autre Cylindre. Si B defcendoit, la furface de P monteroit avec la viteffe p & $P \times p$ feroit la force de l'action de B. Que fi P defcendoit, la furface de B monteroit avec la viteffe b & $B \times b$ feroit la force de l'action de P. Puisque P refifte à B & que B refifte à P, on a donc $B \times b = P \times p$ & par confequent $B . P :: p . b$. Or p la viteffe de la furface de P eft à b la viteffe de la furface de B ce que la furface de B eft à la furface de P. Les hauteurs de B & de P font donc egales. Ainfi l'equilibre fera le niveau.

THEOREME XLII.

Cinq grandeurs etant telles que le changement de la feconde en la troifieme eft une action dont

dont l'effet est le changement de la quatrieme en la cinquieme & que la seconde n'est changée en aucune des grandeurs en qui elle est changée si elle est changée en la premiere, sans que le changement de la seconde en cette grandeur soit l'effet d'une action de la quatrieme : si toute action dont l'effet est un changement de la seconde, a plus de force que toute action de la seconde & si toute action dont l'effet est un changement de la quatrieme, a plus de force que toute action de la quatrieme, la seconde resiste à la quatrieme. Soient *A B C*, *P Q* des grandeurs telles que le changement de *B* en *C* soit une action dont l'effet soit le changement de *P* en *Q* & que *B* ne soit changée en aucune des grandeurs en qui *B* est changée si elle est changée en *A*, sans que le changement de *B* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *P*. Si toute action dont l'effet est un changement de *B* a une force plus grande que la force de toute action de *B* & que toute action dont l'effet est un changement de *P* ait une force plus grande que la force de toute action de *P*, *B* resiste à *P*.

Les grandeurs *A B C*, *P Q* etant telles que le changement de *B* en *C* est une action dont l'effet est le changement de *P* en *Q* & que toute action dont un changement de *P* est l'effet a une force plus grande que la force de toute action de *P*, il s'ensuit que cette action de *B* a une force

force *Y* plus grande que la force de toute action de *P*.

Mais puisque *B* n' est changée en aucune des grandeurs en qui *B* est changée si elle est changée en *A*, sans que le changement de *B* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *P* & que toute action dont l'effet est un changement de *B* a une force plus grande que la force de toute action de *B*, il s'ensuit que *B* n'est changée en aucune des grandeurs en qui *B* est changée si elle est changée en *A*, sans que le changement de *B* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *P* qui ait une force plus grande que *Y*.

Aucune action de *P* n'ayant une force qui ne soit moindre que *Y*, *B* resiste donc à *P*.

SCHOLIE.

Si un Cheval en marchant fait monter un poids suspendu, le cheval resiste à rebrousser. Le poids ne resiste pas à monter, mais il resiste à etre elevé avec une plus grande vitesse que celle que le cheval lui donne.

THEOREME XLIII.

Neuf grandeurs etant telles que la seconde resiste à etre changée en la premiere par la troisieme dont une action a une certaine force, que la cinquieme resiste à etre changée en la quatrieme par

par la sixieme dont une action a une certaine force & que la huitieme n'est changée en aucune des grandeurs en qui elle est changée si elle est changée en la septieme, sans que le changement de la huitieme en cette grandeur soit l'effet d'une action de la neuvieme dont une action a une force qui est la somme de ces deux forces & dont aucune action n'a une plus grande force : si la huitieme est la somme de deux grandeurs egales à la seconde & à la cinquieme & que les forces des actions de la troisieme, de la sixieme & de la neuvieme ayent le même increment, la huitieme resiste à la neuvieme. Soient *B E S*, *C F T*, *A D R*, des grandeurs telles que *E* resiste à etre changée en *B* par *S* & qu'une action de *S* ait la force *Y*, que *F* resiste à etre changée en *C* par *T* & qu'une action de *T* ait la force *Z*, que *D* ne soit changée en aucune des grandeurs en qui *D* est changée si elle est changée en *A*, sans que le changement de *D* en cette grandeur soit l'effet d'une action de *R* & que *X* epuisée par les coordonnées *Y Z* etant la force d'une action de *R*, aucune action de *R* n'ait une force plus grande que *X*. Si *D* est epuisée par deux coordonnées dont l'une soit egale à *E* & l'autre à *F* & que les forces de *S*, de *T* & de *R* ayent l'increment *V*, *D* resiste à *R*.

Les grandeurs *B E S*, *C F T*, *A D R* etant telles que *E* resiste à etre changée en *B* par *S*,

 E n'est

E n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui *E* eſt changée ſi elle eſt changée en *B*, ſans que le changement de *E* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *S*, dont la force Ψ ſoit plus grande que la force de toute action de *S* & une action de *S* ayant la force *Y*, Ψ eſt plus grande que *Y* & puiſque *F* reſiſte à etre changée en *C* par *T*, *F* n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui *F* eſt changée ſi elle eſt changée en *C*, ſans que le changement de *F* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *T*, dont la force Ω ſoit plus grande que la force de toute action de *T* & une action de *T* ayant la force *Z*, Ω eſt plus grande que *Z*.

Or puiſque *D* eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt egale à *E* & l'autre à *F*, que *X* eſt la force d'une action de *R* & que les forces des actions de *S*, de *T* & de *R* ont l'increment *V*, *D* n'etant changée en aucune des grandeurs en qui *D* eſt changée ſi *D* eſt changée en *A*, ſans que le changement de *D* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *R*, il paroit *par Theor. 36.* que *D* n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui *D* eſt changée ſi elle eſt changée en *A*, ſans que le changement de *D* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *R*, dont la force Φ eſt epuiſée par deux coordonnées dont l'une eſt egale à Ψ & l'autre à Ω. Ψ etant plus grande que *Y*, Ω etant plus grande que *Z* & *X* etant epuiſée par les coor-

coordonnées *YZ*, Φ eſt plus grande que *X*. Aucune action de *R* n'ayant une force plus grande que *X*, la force de toute action de *R* eſt donc moindre que Φ & par conſequent *D* reſiſte à *R*.

THEOREME XLIV.

Quatre grandeurs etant telles que la ſeconde reſiſte à etre changée en la premiere par la troiſieme & que toute action de la troiſieme eſt l'effet d'une action de la quatrieme : ſi la force de toute action de la quatrieme eſt la force d'une action de la troiſieme, la ſeconde reſiſte à la quatrieme. Soient *AB*, *OP* des grandeurs telles que *B* reſiſte à etre changée en *A* par *O* & que toute action de *O* ſoit l'effet d'une action de *P*. Si la force de toute action de *P* eſt la force d'une action de *O*, *B* reſiſte à *P*.

Les grandeurs *AB*, *OP* etant telles que *B* reſiſte à etre changée en *A* par *O*, *B* n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui *B* eſt changée ſi elle eſt changée en *A*, ſans que le changement de *B* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *O* qui ait la force *Y* plus grande que la force de toute action de *O*.

Or puisque toute action de *O* eſt l'effet d'une action de *P*, il s'enſuit *par Theor. 39.* que *B* n'eſt changée en aucune des grandeurs en qui

B eſt changée ſi elle eſt changée en *A* ſans que le changement de *B* en cette grandeur ſoit l'effet d'une action de *P* qui ait par conſequent la force *Y*.

Mais aucune action de *P* n'ayant une force qui ne ſoit la force d'une action de *O* & aucune action de *O* n'ayant une force qui ne ſoit moindre que *Y*, aucune action de *P* n'a une force qui ne ſoit moindre que *Y* & par conſequent *B* reſiſte à *P*.

FIN.



APPEN-

APPENDICE.



APPENDICE
où l'on parle de la Logique ou de la maniere d'acquerir la Science.

I.

Le mot de *Perception* & celui d'*Idée* ſont deux termes qui ſignifient la même choſe. Celui de *Connoiſſance* n'a pas tout à fait le même ſens. Car l'on dit qu'une choſe eſt connue de quelqu'un, ſans vouloir dire qu'elle occupe actuellement ſon Eſprit. Mais nous avons l'idée d'une choſe dans le temps que cette choſe eſt l'objet de notre connoiſſance. L'Idée differe auſſi en quelque ſorte de la *Penſée*. Car nous penſons à une choſe quand nous en voulons ſavoir quelque choſe qui nous eſt inconnu. Mais il arrive ſouvent que nous avons l'idée d'une choſe ſans avoir deſſein d'en connoitre ce que nous n'en connoiſſons pas.

II.

Il y a des choſes que l'on *ſent*, c'eſt à dire que l'on connoit par elles mêmes. L'Idée de ces choſes là s'appelle *Senſation* ou *Sentiment*. Telle eſt la vuë d'un objet, un ſon que l'on entend, &c.

Comme l'Ouïe ſuppoſe quelque changement qui ſe fait hors de nous, qui frappe l'oreille & qui ſe fait connoitre par lui même, ainſi dans le Goût & dans l'Odorat on ſent auſſi quelque changement qui ſe fait dans les Organes du goût ou de l'odorat par une certaine action des objets ſur ces organes. A l'egard de l'Attouchement & de la Douleur on ſent on remarque immediatement un changement qui ſe produit ou par un objet exterieur appliqué au Corps ou dans le corps même par une cauſe plus ou moins connue.

III.

Il y a des choſes que l'on connoit par d'autres choſes qui nous ſont connues & ce ſont celles là que l'on *ſait*. La *Science* eſt la connoiſſance des choſes que l'on connoit par la connoiſſance que l'on a de quelque autre choſe.

IV.

La Science exprime ce que l'on connoit & ce que l'on ſait, parce que l'expreſſion d'une choſe connue ſert à en faire connoitre d'autres.

Les noms *ſubſtantifs* ſont des noms qui expriment les ſujets, comme Soleil, Homme. Les noms qui n'expriment pas des ſujets & qui ne ſervent qu'à exprimer l'attribut de quelque ſujet, ſont des noms *adjectifs*, comme beau, riche, ſavant.

Si un nom ſubſtantif ſert à exprimer une eſpece, on exprime par ce nom & par une expreſſion que l'on y ajoute un ſujet qui comprend

prend cette eſpece. Par exemple un homme riche, un habile Juriſconſulte.

Si l'on a peu d'occaſions d'exprimer par un attribut d'autres attributs qui ſoient raiſon ſuffiſante de celui là, on ſe contente d'exprimer ce premier attribut en donnant au nom adjectif qui ſert à l'exprimer une terminaiſon ſubſtantive & par cette expreſſion à laquelle on en ajoute quelque autre on exprime un attribut qui eſt raiſon ſuffiſante du premier. Ces attributs exprimés par un nom ſubſtantif ſont des *Qualitez*. Ainſi l'on dit d'une fleur, qu'elle a une rougeur ſombre, une odeur douce.

Les qualitez des ſujets ſont donc elles mêmes des ſujets. Si un attribut individuel eſt une qualité, il devient lui même un individu. Et les attributs non individuels dont cet individuel eſt raiſon ſuffiſante ſont des eſpeces que ce ſujet comprend. On dit: la ſcience & la vertu de cet homme le firent admirer. La Vertu de Socrate, la Science de Platon ſont des attributs individuels & comme l'on dit pluſieurs choſes de la vertu de l'un & de la ſcience de l'autre, ces attributs ſont auſſi des individus. La vertu, la ſcience ſont des eſpeces que ces individus comprennent.

Mais ſi l'on a beaucoup d'occaſions d'exprimer par un attribut d'autres attributs qui ſoient raiſon ſuffiſante de celui là, on fait de ce premier attribut l'attribut commun d'une eſpece & le nom ſubſtantif qui exprime cette eſpece n'exprime pas

un attribut. Ainſi le Cercle, le Triangle ſont des ſujets & non pas des qualitez. Le mot de Grandeur pris dans le ſens des Geometres n'exprime pas une qualité. Un Roi, un Pere ſont auſſi des ſujets & non pas des qualitez.

V.

On *definit* un nom ſi l'on entend par ce nom une eſpece que l'on exprime par le moyen d'une autre eſpece que celle là comprend. Ainſi le Quarré comprend la figure de quatre cotez & le Quarré eſt un quadrilatere qui a tous les angles droits & tous les cotez egaux.

Si une eſpece en comprend une autre, ou 1°. celleci compoſe la premiere, c'eſt à dire que celleci etant ajoutée à une autre qui ne la ſuppoſe pas & qui n'eſt pas ſuppoſée par elle, ces deux eſpeces priſes enſemble expriment la premiere. Ainſi une Eſpece compoſée eſt definie par des parties coordonnées qui l'epuiſent. La Toiſe eſt une meſure de ſix pieds. Le Violet eſt un compoſé du rouge & du bleu. 2°. Ou la premiere eſt exprimée par la ſeconde en ajoutant à la ſeconde un attribut qui ſuppoſe la ſeconde, comme ſi l'on parle d'un homme qui eſt riche, d'un angle qui eſt aigu & alors la premiere eſpece eſt *ſubordonnée* à la ſeconde. Ainſi le Pere eſt ſubordonné à l'Homme, la Ligne droite eſt ſubordonnée à la Ligne.

Soit donc qu'une Eſpece en comprenne une autre parcequ'elle en eſt compoſée ou parce qu'elle lui eſt ſubordonnée, l'expreſſion de l'eſpece

l'efpece ou de l'attribut que l'on ajoute à la feconde, fuppofe ou ne fuppofe pas la feconde pour etre entendue, mais ne rend pas la feconde fuperflue pour exprimer la premiere.

Si l'on voit du rouge, du jaune, du bleu, on remarque ce en quoi toutes ces chofes different les unes des autres & ce en quoi elles fe reffemblent. On voit qu'elles fe reffemblent en quelque chofe à quoi l'on donne le nom de Couleur. On aquiert ainfi une idée par *abftraction*, c'eft à dire en confiderant ce que differentes chofes ont de femblable. On fait donc auffi entendre ce que le mot de couleur fignifie quoiqu'on ne le definiffe pas. Il fuffit de montrer du rouge, du jaune, du bleu, &c. & de dire: voilà des couleurs. Mais il faut bien remarquer qu'un attribut abftrait, c'eft à dire connu par quelques autres que l'on compare entre eux, ne fuppofe pas que ceux ci foient la raifon fuffifante de celui là ni par confequent que les Efpeces dont ceux ci font les attributs communs comprennent l'efpece dont celui là eft l'attribut commun.

Car fi un fujet comprend une efpece, un attribut de ce fujet eft raifon fuffifante de l'attribut commun de cette efpece & n'a pas cet attribut commun pour raifon fuffifante. Le premier attribut exprime donc le fecond & il eft exprimé par le fecond en ajoutant à l'expreffion du fecond un troifieme attribut dont l'expreffion par confequent ne rend pas l'expreffion du fecond fuperflue pour exprimer le premier. Or

l'on

l'on ne fauroit exprimer ce que l'on entend par une chofe rouge en difant que c'eft une chofe qui renferme l'attribut d'etre colorée & en ajoutant à cet attribut quelque autre attribut qui ne fuffife fans celui là pour exprimer ce que l'on entend par rouge. Cela fait donc voir que les attributs d'etre rouge, d'etre bleu, ne font pas raifon fuffifante d'etre coloré, d'etre vifible, quoique nous ne connoiffions point de fujet qui foit rouge ou bleu fans etre coloré & vifible. La rougeur ne comprend donc pas la couleur & la rougeur ne peut etre definie parce qu'elle ne comprend aucune efpece.

VI.

Il y a des Efpeces dont on connoit plufieurs attributs qui fe prefentent aux fens & qui font tels que fi l'on ajoute l'expreffion des uns à celle des autres, on en exprime affez pour diftinguer ces efpeces les unes des autres, quoique l'on n'en exprime jamais affez pour exprimer l'effence de ces efpeces. L'expreffion de ces attributs n'eft pas une definition, mais une *defcription* de ces Efpeces. En voyant plufieurs epis de blé & plufieurs citrons l'on fe fait une idée de deux efpeces dont l'une eft cette plante appellée le Blé & l'autre ce fruit appellé Citron. On decrit chacune de ces efpeces par des attributs qui ne conviennent pas à d'autres plantes que l'on connoiffe, mais on ne la definit pas parceque l'on n'exprime jamais tous les attributs que l'on a vûs & qui entrent dans l'idée que l'on fe fait du Blé ou d'un Citron.

La

La même Eſpece aura donc deux deſcriptions dont l'une exprimera plus d'attributs que l'autre. On trouva une matiere jaune, luiſante, peſante & ce fut à peu près la deſcription que l'on fit de l'or. On remarqua enſuite ſucceſſivement que cette eſpece deſignée par le nom d'Or avoit encore d'autres attributs: de s'etendre ſous le marteau, d'etre fondue par le feu, de ne point s'evaporer, de ſe diſſoudre par l'eau regale. Ainſi la deſcription de l'or eſt differente à preſent de ce qu'elle etoit autrefois. L'Or eſt une matiere jaune, luiſante, d'un certain poids, malleable, fuſile, fixe &c.

VII.

Pour àquerir de la ſcience il faut de la *memoire:* on connoit que l'on a eu d'une choſe une certaine idée. Ainſi je me ſouviens d'avoir eté dans une certaine ville & d'y avoir vû ou entendu telle & telle choſe.

Une idée que l'on a, fait que l'on ſe ſouvient de l'avoir eüe. En voyant un homme on ſe ſouvient de l'avoir vû autrefois.

Un ſouvenir en produit un autre. Une idée que je me ſouviens d'avoir eüe fait que je me ſouviens du temps, du lieu où je l'ai eüe ou de quelques autres circonſtances qui l'accompagnoient.

VIII.

On eſt *attentif* à une choſe, ſi l'on en a une idée qui produit d'autres idées de cette choſe & qui la fait mieux connoitre. En regardant un objet on voit ce que l'on ne voyoit pas d'abord.

En

En faiſant attention à une choſe on a l'idée d'un attribut qu'on ne diſtingue pas d'un attribut que l'on a remarqué dans cette choſe: quoiqu'une plus grande attention faſſe diſtinguer l'un de ces attributs de l'autre. Ainſi en penſant au nom d'une perſonne, un autre nom que le ſien me vient dans l'eſprit, ſans que je le diſtingue de celui qu'on lui a donné en ma preſence. Ainſi ayant l'idée d'un nombre que j'ai ſçu etre egal à ſept fois huit, cette idée eſt ſuivie de l'idée du nombre cinquante quatre & je ne remarque pas que l'un de ces nombres n'eſt pas l'autre. Mais ce que l'on ne remarque pas d'abord ſe remarque ſi l'on a une plus grande attention. Car telle idée qui n'en a pas produit une autre dans un certain temps, la produit dans un autre temps. C'eſt par ſa durée qu'elle en produira une autre.

On connoit qu'un ſujet ne renferme pas un certain attribut, parce qu'une certaine attention ne fait pas connoitre qu'il le renferme & qu'elle le feroit connoitre s'il le renfermoit. Je connois qu'il n'y a point de livre ſur cette table, parceque en la regardant avec une certaine attention, je n'y en voi point.

IX.

Afin que ce que nous allons dire convienne auſſi bien aux occaſions où l'on nie qu'à celles où l'on affirme quelque attribut d'un ſujet, nous exprimerons affirmativement tous les attributs en appellant les uns *poſitifs* & les autres *negatifs*. L'Eau eſt liquide & elle n'eſt pas compri-

comprimable : ce ſont deux attributs qu'elle renferme, l'un poſitif, l'autre negatif. Deux attributs ſont *contraires* l'un à l'autre, ſi l'un eſt la negation de l'autre, comme etre rond & n'etre pas rond.

La diſtinction des grandeurs poſitives & negatives n'eſt auſſi qu'un artifice deſtiné à abbreger les operations que l'on fait ſur des grandeurs telles que la ſomme des unes eſt un reſte de celle des autres. Les fractions pareillement ne ſont qu'un artifice propre à racourcir les operations que l'on fait ſur des nombres dont les unitez, quoique differentes, ſont les unitez d'une même grandeur. Toute grandeur eſt poſitive & tout nombre eſt un nombre entier.

On *juge* qu'une choſe renferme un attribut poſitif ou negatif, ſi l'on a eu une attention que l'on ne remarque pas etre inſuffiſante pour connoitre que cette choſe renferme cet attribut.

Si une choſe renferme un certain attribut & que l'on juge qu'elle le renferme, ce jugement eſt *vrai*. Mais ſi l'on juge qu'une choſe renferme un certain attribut, quoiqu'elle renferme le contraire de celuilà, ce jugement eſt *faux*.

X.

Si tout ce qui renferme un certain attribut poſitif ou negatif, en renferme un autre & qu'un certain ſujet renferme le premier, ce ſujet renferme le ſecond. Cela etant connu, l'on juge que tout ce qui renferme le premier attribut renferme le

le ſecond & l'on juge auſſi qu'un certain ſujet renferme le premier & ces deux jugemens en produiſent un troiſieme qui eſt, que ce ſujet renferme le ſecond attribut. Faire ces trois jugemens, c'eſt raiſonner. On *raiſonne* quand on juge qu'un ſujet renferme un certain attribut & que ce jugement eſt produit par deux autres, l'un que tout ce qui renferme un certain attribut renferme celui là, l'autre que ce ſujet renferme cet autre attribut. De ces deux jugemens qui produiſent l'autre ou des propoſitions qui les expriment & qui s'appellent les *premiſſes*, la premiere s'appelle la *majeure*, l'autre la *mineure*. Le jugement produit par ceux là eſt la *Concluſion*.

Si tout ce qui renferme un certain attribut en renferme un autre, tout ce qui renferme le contraire du ſecond renferme le contraire du premier. On raiſonne donc auſſi en jugeant que tout ce qui renferme le premier attribut renferme le ſecond & qu'un certain ſujet renferme le contraire du ſecond & en concluant que ce ſujet renferme le contraire du premier. Car il ſuffit de ſubſtituer à cette premiere propoſition cette majeure : Tout ce qui renferme le contraire du ſecond attribut renferme le contraire du premier. Si l'une de ces deux propoſitions eſt vraie, l'autre l'eſt auſſi.

XI.

Si pluſieurs raiſonnemens ſont exprimés de ſuite enſorte que de deux raiſonnemens qui ſe ſuivent immediatement, la majeure ou la mineure de l'un ſoit la concluſion de l'autre : une telle ſuite de rai-

raiſonnemens eſt ce qu'on appelle *Methode*. Si des deux raiſonnemens qui ſe ſuivent immediatement la majeure ou la mineure du premier eſt la concluſion du ſuivant, la methode s'appelle *Analyſe* & ſi la concluſion du premier eſt la majeure ou la mineure du ſecond, la methode s'appelle *Syntheſe*.

Comme ce ſont les jugemens enoncés dans les premiſſes qui produiſent celui de la concluſion, il eſt evident que dans l'Analyſe le jugement qu'exprime l'une des premiſſes du raiſonnement qui precede eſt produit par le raiſonnement qui ſuit, au lieu que dans la Syntheſe le jugement qu' exprime une des premiſſes du raiſonnement qui ſuit eſt produit par le raiſonnement qui precede. Ainſi dans la Syntheſe il y a toujours une premiſſe qui etant la concluſion du raiſonnement precedent eſt deja reconnue pour vraie, au lieu que dans l'Analyſe l'une des premiſſes devient la concluſion du raiſonnement qui ſuit & qui a pour premiſſes deux nouvelles propoſitions leſquelles demandent chacune un nouvel examen.

C'eſt ce qui fait voir que l'Analyſe ſert à decouvrir les veritez que l'on cherche, mais que la Syntheſe eſt plus propre à enſeigner les veritez trouvées parcequ'elle exige moins d' attention de ceux à qui on les propoſe.

XII.

Comme un jugement en produit un autre par un ſimple raiſonnement ou par la methode, un faux jugement produit quelquefois une concluſion

veritable. Une verité est aussi prise pour une autre par un faux jugement.

On juge avec *raison* qu'une chose renferme un certain attribut, si ce jugement est veritable & qu'il ne soit pas une conclusion produite par un faux jugement.

Ce que nous avons dit de la Raison suffisante s'applique aussi aux attributs negatifs : Un attribut positif ou negatif en *prouve* un autre, s'il suffit qu'une chose renferme le premier attribut pour qu'elle renferme le second.

Tout attribut etant l'affirmation de ce que l'on connoit qu'une chose est ou la negation de ce que l'on connoit qu'elle n'est pas : si un attribut en prouve un autre, on juge avec raison que tout ce qui renferme le premier renferme le second.

XIII.

Il y a des actions qui sont en notre pouvoir & dont nous donnerons la definition dans la Morale.

Mais l'on dit aussi qu'un individu *peut* avoir un certain attribut, si l'on n'en connoit aucun attribut qui prouve le contraire de celui là.

Un individu peut etre (ou pour mieux dire, peut comprendre) l'effet d'une certaine cause, si l'on ne connoit rien de cet individu qui prouve qu'il n'ait pas eté produit par cette cause & il peut aussi avoir eu une autre cause & encore une autre, si l'on ne connoit rien qui les exclue.

Un individu peut aussi produire un certain effet, si l'on ne connoit rien de cet individu qui prouve qu'il ne produira pas cet effet.

Il se

Il ſe peut qu'il y ait une Matiere dont toutes les parties ſont fluides & cette matiere qui peut avoir cette conformité avec la Lumiere de s'eloigner d'un Centre en ligne droite, peut auſſi etre cauſe que les Corps eloignés de ce Centre, entant que leur eloignement depend de leur maſſe, s'en approchent d'autant plus, qu'ils contiennent moins de cette matiere dans un egal volume.

Comme l'on ignore ſouvent ſi une perſonne ne fera pas une action qu'elle peut faire & que l'on ne ſait ſi un evenement qui peut arriver n'aura pas lieu, c'eſt pour cela que l'on ſe ſert des mêmes termes pour exprimer le pouvoir & la poſſibilité.

On dit qu'une choſe n'eſt pas, mais qu'elle auroit pû etre, parceque l'on n'avoit pas raiſon de croire qu'elle ne fut point. On dit qu'une choſe n'eſt pas, mais qu'elle pourra etre, parce que l'on n'a pas raiſon de juger qu'elle ne ſera point.

Si un individu peut renfermer un attribut qui en prouve un autre, il peut renfermer le ſecond. Car ſi les attributs que l'on connoit de cet individu excluoient le ſecond attribut, ils exclurroient le premier. C'eſt ainſi que la poſſibilité d'une choſe ſe prouve par la poſſibilité d'une autre.

Quand on dit qu'il *faut* qu'un individu renferme un certain attribut ou qu'il le renferme *neceſſairement*, cela ſignifie qu'il ne peut pas ne le pas renfermer, que ce que l'on en connoit prouve qu'il le renferme.

XIV.

Un individu renferme *probablement* un attribut, s'il renferme plusieurs des attributs qu'il peut renfermer & qui prouveroient celui là s'il les renfermoit tous.

Un individu est probablement la cause d'un certain effet s'il a une partie des attributs qu'il peut avoir & qui lui suffiroient pour etre cette cause. Si l'on dispute avec une personne qui s'offense de la contradiction, qui a un certain interet à cœur, qui a un certain pouvoir &c. ces circonstances etant un grand nombre de celles qui sont possibles & qui suffiroient pour que cette dispute produisit un facheux effet, il s'ensuit qu'elle sera probablement la cause d'un effet de cette nature.

Un individu est probablement l'effet d'une certaine cause s'il a une partie des attributs qu'il peut avoir & qui lui suffiroient pour etre cet effet. Supposé que plusieurs dez soient situés de maniere que leur surface superieure exprime la suite des nombres naturels, on voit là plusieurs attributs, lesquels s'ils etoient reunis avec un petit nombre d'autres qui sont possibles, prouveroient que ces dez ont eté placés ainsi par quelqu'un selon l'idée qu'il a eue des nombres naturels. Donc plus il y a de dez, plus il est probable que leur situation est l'effet de cette cause.

Une chose peut etre l'ouvrage de la Nature, quoiqu'elle ressemble aux productions de l'art.

Cepen-

Cependant plus elle leur ressemble & plus il est probable qu'elle est artificielle, si elle peut l'etre. Les hommes font des statues de bronze qui representent des hommes. C'est pour cela que toute statue de bronze qui represente un homme est probablement un ouvrage humain.

Plus on remarque dans un Tableau les manieres d'un Peintre connu, c'est à dire les qualitez qu'il auroit données à ce tableau s'il l'avoit fait, plus il est probable que c'est son ouvrage à moins que l'on ne sache d'ailleurs que ce n'est pas lui qui l'a fait.

Un individu renferme probablement un attribut si cet attribut resulte de plusieurs des attributs que cet individu peut renfermer & qui prouveroient celuilà s'il resultoit de tous.

Un individu est probablement la cause d'un certain effet, si cet effet resulte de plusieurs des attributs que cet individu peut renfermer & qui prouveroient cet effet s'il resultoit de tous. S'il faut que d'un coup de dé l'on jette le nombre six pour gagner, on peut perdre en jettant un, en jettant deux &c. & comme il seroit certain que l'on perdroit si la perte resultoit de tous les points que l'on peut jetter, il s'ensuit que plus l'on peut jetter de points qui feront perdre & plus il est probable que l'on perdra.

Un individu est probablement l'effet d'une certaine cause, si cette cause resulte de plusieurs des attributs que cet individu peut renfermer &

qui prouveroient cette cauſe ſi elle reſultoit de tous. Si toutes les cauſes qui ont pû produire un incendie ſuppoſoient une negligence, il ſeroit certain que cet incendie eſt l'effet d'une negligence. Donc plus il y a de cauſes qui ont pû produire cet incendie & qui ſuppoſent une negligence, plus il eſt probable que c'eſt une negligence qui l'a cauſé.

Si une propoſition eſt vraie ſuppoſé qu'une autre le ſoit, la premiere eſt auſſi probable que la ſeconde.

Si une propoſition eſt vraie ſuppoſé que de deux ou de pluſieurs autres il y en ait une qui le ſoit, la premiere eſt plus probable que toutes les autres par ce qu'elle a la probabilité de chacune d'entre elles.

S'il eſt plus probable qu'une choſe renferme un certain attribut qu'il n'eſt probable qu'elle renferme le contraire de celui là, il eſt *vraiſemblable* qu'elle renferme celui là.

Il y a des choſes qui ſont ſi vraiſemblables que l'on n'en conſidere aucune comme etant plus vraiſemblable que celles là. On dit auſſi qu'elles ſont certaines. La *Certitude morale* eſt une vraiſemblance qui n'eſt pas moindre qu'une autre.



TABLE

TABLE
DES
DEFINITIONS.

Me-

F I N.

Imprimé à Leipsic
chez Jean Gottlob Immanuel Breitkopf.







